Info III Tutorium

Thomas Pajor

16. Januar 2006

Punkteverteilung

Übungsblatt 9

Diesmal gab es keine Abgabe, also keine Punkte.

Die Aufgabe (1) auf Blatt 10 braucht ihr wegen der etwas erhöhten Schwierigkeit erst nächste Woche, also am 27.01.2006, abzugeben. Aufgabe (2) jedoch ganz normal diese Woche!

Punkteverteilung

Übungsblatt 9

Diesmal gab es keine Abgabe, also keine Punkte.

Die Aufgabe (1) auf Blatt 10 braucht ihr wegen der etwas erhöhten Schwierigkeit erst nächste Woche, also am 27.01.2006, abzugeben. Aufgabe (2) jedoch ganz normal diese Woche!

Chomsky–Normalform

Definition

Eine kontextfreie Grammatik G ist in *Chomsky–Normalform*, falls alle Produktionen folgende Form haben:

$$A \longrightarrow BC \qquad \text{oder} \qquad A \longrightarrow a$$

wobei $A, B, C \in V$ und $a \in \Sigma$.

Zur Herleitung der Chomsky–Normalform aus einer beliebigen kontextfreien Grammatik gibt es ein systematisches Verfahren.

Verfahren zur Herleitung der CNF

Schritt 1: Elimination von Terminalzeichen auf der rechten Seite

- Füge für jedes $x_i \in \Sigma$ eine neue Variable X_i in V hinzu.
- Ersetze in allen Produktionen jedes Vorkommen von x_i durch X_i.
- Füge für jedes $x_i \in \Sigma$ eine neue Produktion $X_i \rightarrow x_i$ hinzu.

Verfahren zur Herleitung der CNF

Schritt 1: Elimination von Terminalzeichen auf der rechten Seite

- Füge für jedes $x_i \in \Sigma$ eine neue Variable X_i in V hinzu.
- Ersetze in allen Produktionen jedes Vorkommen von x_i durch X_i.
- Füge für jedes $x_i \in \Sigma$ eine neue Produktion $X_i \to x_i$ hinzu.

Verfahren zur Herleitung der CNF

Schritt 1: Elimination von Terminalzeichen auf der rechten Seite

- Füge für jedes $x_i \in \Sigma$ eine neue Variable X_i in V hinzu.
- Ersetze in allen Produktionen jedes Vorkommen von x_i durch X_i.
- Füge für jedes $x_i \in \Sigma$ eine neue Produktion $X_i \rightarrow x_i$ hinzu.

Verfahren zur Herleitung der CNF

Schritt 2: Rechte Seiten verkürzen

Betrachte jede Regel der Form

$$A \rightarrow B_1 \dots B_m$$

mit $m > 2$ und $A, B_i \in V$. Führe $m-2$ neue Variablen $C_1, \dots, C_{m-2}$ ein und ersetze die obige Regel durch folgende Regeln:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow B_1 C_1 \\ C_i &\rightarrow B_{i+1} C_{i+1} \qquad \text{für } 1 \leq i \leq m-3 \\ C_{m-2} &\rightarrow B_{m-1} B_m \end{aligned}$$

Verfahren zur Herleitung der CNF

Schritt 2: Rechte Seiten verkürzen

Betrachte jede Regel der Form

$$A \rightarrow B_1 \dots B_m$$

mit $m > 2$ und $A, B_i \in V$. Führe $m - 2$ neue Variablen $C_1, \dots, C_{m-2}$ ein und ersetze die obige Regel durch folgende Regeln:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow B_1 C_1 \\ C_i &\rightarrow B_{i+1} C_{i+1} \qquad \text{für } 1 \leq i \leq m-3 \\ C_{m-2} &\rightarrow B_{m-1} B_m \end{aligned}$$

Verfahren zur Herleitung der CNF

Schritt 3: Zyklen bei Kettenregeln löschen

Verfolge alle Kettenregeln bis sich ein Kreis bildet, also betrachte

$$A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_r \to A_1$$

Ersetze in allen Produktionen die Variablen $A_2, \ldots, A_r$ durch A_1 und lösche die Produktion $A_1 \to A_1$.

Verfahren zur Herleitung der CNF

Schritt 3: Zyklen bei Kettenregeln löschen

Verfolge alle Kettenregeln bis sich ein Kreis bildet, also betrachte

$$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \ldots \rightarrow A_r \rightarrow A_1$$

Ersetze in allen Produktionen die Variablen $A_2, \ldots, A_r$ durch A_1 und lösche die Produktion $A_1 \rightarrow A_1$.

Verfahren zur Herleitung der CNF

Schritt 4: Sonstige Kettenproduktionen löschen

Wir nummerieren alle Variablen durch, also $V = \{A_1, \ldots, A_n\}$ wobei aus der Existenz einer Produktion $A_i \rightarrow A_j$ folgen soll, dass $i < j$ (Topologisches Sortieren).

Für jedes $k = n - 1, \ldots, 1$ lösche jede Regel der Form $A_k \rightarrow A_l$ wobei $l > k$, und füge zu jeder Regel $A_l \rightarrow X$ (X beliebig) eine Regel $A_k \rightarrow X$ hinzu.

Verfahren zur Herleitung der CNF

Schritt 4: Sonstige Kettenproduktionen löschen

Wir nummerieren alle Variablen durch, also $V = \{A_1, \ldots, A_n\}$ wobei aus der Existenz einer Produktion $A_i \rightarrow A_j$ folgen soll, dass $i < j$ (Topologisches Sortieren).
Für jedes $k = n - 1, \ldots, 1$ lösche jede Regel der Form $A_k \rightarrow A_l$ wobei $l > k$, und füge zu jeder Regel $A_l \rightarrow X$ (X beliebig) eine Regel $A_k \rightarrow X$ hinzu.

Verfahren zur Herleitung der CNF

Schritt 4: Sonstige Kettenproduktionen löschen

Wir nummerieren alle Variablen durch, also $V = \{A_1, \ldots, A_n\}$ wobei aus der Existenz einer Produktion $A_i \rightarrow A_j$ folgen soll, dass $i < j$ (Topologisches Sortieren).
Für jedes $k = n - 1, \ldots, 1$ lösche jede Regel der Form $A_k \rightarrow A_l$ wobei $l > k$, und füge zu jeder Regel $A_l \rightarrow X$ (X beliebig) eine Regel $A_k \rightarrow X$ hinzu.

Aufgabe

Aufgabe 1

Gegeben sei folgende Grammatik $G := (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$$P := \{S \rightarrow aSa \mid bSb \mid aa \mid bb\}$$

(a) Bestimmen Sie den (maximalen) Chomsky–Typ der Grammatik G.

(b) Wandeln Sie G in Chomsky–Normalform G'.

(c) Bestimmen Sie die durch G erzeugte Sprache $L(G)$ und beweisen Sie ihre Behauptung.

Aufgabe

Aufgabe 2 - Definition

Sei $G := (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik und seien induktiv die folgenden Mengen definiert:

$$\begin{aligned} X_0 &:= \Sigma \\ X_{n+1} &:= X_n \cup \{A \mid A \in V, \exists z \in X_n^* : A \to z\} \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie: $X_i \subseteq X_{i+1}$ für alle i und es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $X_k = X_{k+1}$ und falls $X_k = X_{k+1}$ so ist auch $X_k = X_{k+r}$ für alle $r \in \mathbb{N}$.

Aufgabe

Aufgabe 2 - Definition

Sei $G := (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik und seien induktiv die folgenden Mengen definiert:

$$\begin{aligned} X_0 &:= \Sigma \\ X_{n+1} &:= X_n \cup \{A \mid A \in V, \exists z \in X_n^* : A \to z\} \end{aligned}$$

(b) Zu jedem $A \in V$ sei $L(A) = \{z \mid z \in \Sigma^*, A \overset{*}{\Rightarrow} z\}$
Zeigen Sie, dass $L(A) \neq \emptyset$ genau dann, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, mit $A \in X_n$.

Aufgabe

Aufgabe 2 - Definition

Sei $G := (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik und seien induktiv die folgenden Mengen definiert:

$$
\begin{aligned}
X_0 &:= \Sigma \\
X_{n+1} &:= X_n \cup \{A \mid A \in V, \exists z \in X_n^* : A \to z\}
\end{aligned}
$$

(c) Geben Sie den worst–case Aufwand der Konstruktion aller X_i im $\mathcal{O}$ Kalkül an.