Das Pumping Lemma für Reguläre Sprachen (Revision 1.1)

Thomas Pajor

13. Dezember 2005

Ich möchte hier nochmal etwas ausführlicher über die Beweistechnik mit Hilfe des Pumpsatzes eingehen, da mir das selbst nochmal ziemlich Kopfschmerzen bereitet hat. Es gibt zwei verschiedene Techniken zum Nachweisen, dass eine Sprache nicht regulär ist, deren Unterschiede auf den ersten Blick vielleicht nicht ganz klar sind. Außerdem möchte ich noch auf einige Tücken des Pumping Lemma eingehen.

Dank ist außerdem noch Dr. Thomas Käufl auszusprechen, der sich die Mühe und Zeit genommen hat das Papier durchzusehen und auch durch einige Tipps zu dessen Verbesserung beigesteuert hat.

1 Beweistechniken

Zunächst möchte ich ein wenig allgemeine Beweistechniken ansprechen, damit man versteht wo der Unterschied zwischen den zwei Methoden ist, und warum sie funktionieren.

Klar sollte sein, dass eine aussagenlogische Formel niemals gleichzeitig wahr und falsch sein kann. Man bezeichnet dies auch als *Widerspruchsfreiheit*.

Wenn wir nun etwas beweisen möchten, dann haben wir meistens zwei Aussagen A und B und möchten zeigen, dass $A \to B$ gilt – also eine *wenn A dann auch B* Beziehung. Um dies durchzuführen gibt es verschiedene „Verfahren“, wobei ich die für uns jetzt wichtigen mal kurz erläutern will:

1.1 Direkter Beweis

Der direkte Beweis ist am einfachsten zu verstehen. Hier zeigen wir direkt $A \to B$, in dem wir zunächst A als wahr annehmen und dann mit Hilfe von Sätzen oder durch

Konstruktion A in B durch eine Kette von Implikationen überführen. Wegen der Transitivität von „$\rightarrow$“ gilt dann auch $A \rightarrow B$, und somit ist auch B (unter der Annahme A) wahr.

1.2 Widerspruchsbeweis

Der *Widerspruchsbeweis* beruht auf dem Prinzip der „Widerspruchsfreiheit“ von Aussagen. Wir möchten zeigen, dass $A \rightarrow B$ gilt was vielleicht nicht so einfach geht, also zeigen wir lieber dass $\neg(A \rightarrow B)$ *nicht* gilt. Ein bisschen aussagenlogisches Umformen liefert:

$$\begin{aligned}\neg(A \rightarrow B) &\Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B)\\ &\Leftrightarrow A \wedge \neg B\end{aligned}$$

Wir negieren das zu zeigende, und zeigen dass die negierte Aussage B zusammen mit den Voraussetzungen A nicht gelten kann[1]. Es ist also $A \wedge \neg B$ falsch, was der Aussage, dass $A \rightarrow B$ wahr ist, entspricht.

1.3 Kontraposition / Indirekter Beweis

Eine dritte Möglichkeit die ich noch vorstellen möchte ist die sogenannte *Kontraposition*[2]. Wir können zunächst die Formel $A \rightarrow B$ ein wenig umformen:

$$\begin{aligned}A \rightarrow B &\Leftrightarrow \neg A \vee B\\ &\Leftrightarrow \neg A \vee \neg\neg B\\ &\Leftrightarrow \neg\neg B \vee \neg A\\ &\Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A\end{aligned}$$

Wir sehen dass die Formeln $A \rightarrow B$ und $\neg B \rightarrow \neg A$ äquivalent sind. Wir negieren also die Behauptung B und zeigen durch eine Kette von Implikationen dass die negierte Voraussetzung A folgt[3].

Wichtig: Im Unterschied zum Widerspruchsbeweis wird hier nicht die zu zeigende Implikation $A \rightarrow B$ negiert!

2 Pumping Lemma

Ok, kommen wir nun endlich zum Pumping Lemma. Das Pumping Lemma ist, wie der Name „Lemma“ schon andeutet, ein *Hilfssatz*, und wird meist zum Beweis der nicht–

[1] Man sagt auch oft „Man führt $\neg B$ zu einem Widerspruch mit A“
[2] Vorsicht: Oft verwechselt man das mit dem Beweis durch Widerspruch
[3] Meistens zeigt man $\neg B \rightarrow \neg A$ dann direkt :-)

Regularität einer Sprache benutzt. Folgende Aussage wird vom PL geleistet:

$$\begin{array}{lll} \text{Sei } L \text{ regulär} & \Longrightarrow & \exists n \in \mathbb{N}: \\ & & \forall w \in L \text{ mit } |w| > n: \\ & & \exists \text{ Zerlegung } w = uvx \text{ mit } |uv| \le n \text{ und } |v| > 0: \\ & & \forall i \in \mathbb{N}_0 : uv^i x \in L \end{array}$$

Nicht mehr und nicht weniger.

Man sieht, dass das Pumping Lemma (nur) eine Implikation liefert. Wir bezeichnen diese mal mit den Symbolen $R \to S$.

3 Beweis der Nicht–Regularität

Soviel zum Vorgeplänkel, wie zeigt man nun dass eine Sprache L nicht regulär ist? Hier gibt es die folgenden zwei gängigen Techniken:

3.1 Der Widerspruchsbeweis

Was ist zu beweisen? Wir haben eine Sprache L gegeben, und sollen daraus folgern dass L nicht regulär ist. Am besten man geht das anhand eines Beispiels durch. Nehmen wir also die Sprache $L := \{a^k b^k \mid k \in \mathbb{N}\}$, dann lautet die zu beweisende Aussage:

$$\text{Sei } L = \{a^k b^k \mid k \in \mathbb{N}\} \quad \Longrightarrow \quad L \text{ ist nicht regulär}$$

Analog zu Abschnitt 1.2 können wir das als Implikation $A \to B$ auffassen. Da wir einen Widerspruchsbeweis durchführen wollen, zeigen wir dass die negierte Aussage

$$\neg(A \to B) \quad \Leftrightarrow \quad A \wedge \neg B$$

nicht gelten kann, in dem wir einen Widerspruch herleiten. Also

$$L = \{a^k b^k \mid k \in \mathbb{N}\} \quad \wedge \quad L \text{ ist regulär}$$

wollen wir widerlegen.

Da wir nun L als regulär annehmen, können wir das Pumping Lemma anwenden und erhalten

$$\begin{array}{lll} L = \{a^k b^k \mid k \in \mathbb{N}\} & \wedge & \exists n \in \mathbb{N}: \\ & & \forall w \in L \text{ mit } |w| > n: \\ & & \exists \text{ Zerlegung } w = uvx \text{ mit } |uv| \le n \text{ und } |v| > 0: \\ & & \forall i \in \mathbb{N}_0 : uv^i x \in L \end{array} \tag{1}$$

als zu widerlegende Aussage. Wenn wir jetzt zeigen können, dass es für L so ein n nicht geben kann, dann haben wir es geschafft.

Sei n die Zahl aus dem Pumping Lemma (beliebig aber fest) und das Wort $w \in L$ beliebig (also $w = a^k b^k$, $k \in \mathbb{N}$), aber so dass $|w| > n$ erfüllt ist[4]. Weiterhin sei $w = uvx$ eine (beliebige) Zerlegung von w, so dass $|uv| \leq n$ und $|v| > 0$. Wie können u, v und x aussehen?

- Fall 1. v liegt komplett im Teil a^k. Dann gibt es ein $i \in \mathbb{N}$, so dass $uv^i x \notin L$, zum Beispiel $i = 0$. Dies ist ein Widerspruch zur angenommenen Regularität von L.
- Fall 2. v liegt teilweise in a^k und teilweise in b^k. Auch hier gibt es ein i so dass $uv^i x \notin L$, nämlich für $i = 2$ gilt $uv^2 x = a^r a^\psi b^\phi a^\psi b^\phi b^s \notin L$ (für geeignete $r, s, \phi, \psi \in \mathbb{N}$ wobei $\phi, \psi > 0$). Auch hier können wir einen Widerspruch zur angenommenen Regularität herleiten.
- Fall 3. v liegt komplett im Teil b^k. Analoger Fall zu 1.

□

Wichtig ist: Wir haben den Widerspruch allgemein für jedes mögliche n hergeleitet, und uns nicht auf ein n festgelegt.

3.1.1 Es Geht Noch Kürzer

Dem aufmerksamen Leser könnte hier aufgefallen sein, dass wir sogar ein bisschen „zu viel“ gezeigt haben. Da in Klausuren meistens etwas Zeitdruck herrscht, sollte man sich kurz fassen.

In der Formel (1) aus Abschnitt 3.1 steht ja eine allquantifizierte Aussage über die Wörter $w \in L$. Da wir (1) aber widerlegen wollen, reicht es ein Gegenbeispiel (in unserem Fall ein „Beispielwort“) zu finden das die Formel widerlegt. Man muss aber aufpassen, dass man nicht den Fehler macht und konkret über das n verfügt!

Gehen wir das mal durch: Sei n die Pumping Lemma Zahl (wieder beliebig aber fest) und zu dem n betrachte das Wort $w \in L$, zum Beispiel gerade $w := a^n b^n$. Da wir L als regulär annehmen, müsste es auch für dieses Wort eine Zelergung $w = uvx$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| > 0$ geben, so dass für alle $i \in \mathbb{N}_0$ auch $uv^i x \in L$.

Für jede Zerlegung $w = uvx$ mit $|uv| \leq n$, $|v| > 0$ gilt, dass v komplett im Teil „a^n“ von w liegt. Da $v \neq \varepsilon$ gibt es aber immer ein $i \in \mathbb{N}_0$, zum Beispiel $i = 0$, so dass $uv^i x \notin L$. Dies ist ein Widerspruch zur angenommenen Regularität. □

Schon sind wir fertig. Wir konnten wieder zeigen, dass die Aussage $A \wedge \neg B$ falsch ist, was die zu zeigende Aussage $A \rightarrow B$ wahr macht. Allerdings entfällt wegen der geschickten Angabe des Beispielwortes die Fallunterscheidung.

[4]Wichtig: Wir haben hier die Wörter $a^k b^k$ *nicht* an die PL Zahl n gekoppelt, denn wir müssen ja zu jedem n *alle* Wörter $w \in L$ betrachten, für die $|w| > n$ erfüllt ist!

3.2 Anwendung der Kontraposition des PL

Diese Methode finde ich weitaus eleganter, und sie ist meiner Meinung nach auch einfacher verständlich. Statt einem Widerspruchsbeweis unter benutzung des PL, wenden wir die Gegenaussage des Pumping Lemma direkt an. Das Pumping Lemma liefert ja, wie in 2 angesprochen, eine Aussage $R \rightarrow S$, und laut Abschnitt 1.3 ist das äquivalent zu der Aussage $\neg S \rightarrow \neg R$.

Wenn wir also zeigen können, dass die Aussage $\neg S$ für unsere Sprache L *erfüllt* ist, folgert das Pumping Lemma automatisch $\neg R$, was gerade die gewünschte nicht–Regularität von L ist. Schreiben wir das Pumping Lemma doch mal in der Form $\neg S \rightarrow \neg R$ hin:

$$\begin{array}{ll} \forall n \in \mathbb{N} : & \\ \exists w \in L \text{ mit } |w| > n : & \\ \forall \text{ Zerlegungen } w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n \text{ und } |v| > 0 : & \\ \exists i \in \mathbb{N}_0 : uv^i x \notin L & \qquad \Longrightarrow \quad L \text{ ist nicht regulär} \end{array}$$

Man muss hier natürlich aufpassen dass man die Aussage S korrekt negiert (alle Quantoren umdrehen!), aber das sollte aus Info I–II und der Prädikatenlogik hinreichend bekannt sein.

Wie zeigen wir nun für unsere Beispiel–Sprache $L = \{a^k b^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ dass $\neg S$ gilt? Das ist ziemlich einfach:

Sei n wieder die Pumping Lemma Zahl, und zu jedem n betrachte ein Wort $w := a^n b^n \in L$[5]. Offensichtlich ist dann $|w| > n$ stets erfüllt.

Betrachte nun jede Zerlegung $w = uvx$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| > 0$. Man sieht, dass v wegen $|uv| \leq n$ immernur aus as bestehen kann, und da $|v| > 0$, ist v auch nicht leer. Es existiert also ein $i \in \mathbb{N}_0$, zum Beispiel $i = 0$, so dass $uv^i x \notin L$, denn

$$uv^0 x = a^l b^n \qquad (l < n)$$

Damit ist $\neg S$ erfüllt und wir können die umgedrehte Version des Pumping Lemma anwenden, so dass $\neg R$ gefolgert werden kann; Also gilt „L ist nicht regulär“. □

3.3 Unterschiede?

Man mag sich nun fragen: „Wir zeigen doch in und 3.1.1 und 3.2 genau das gleiche?“. Nein! Wir benutzen zwei komplett verschiedene Beweistechniken.

Beim Widerspruchsbeweis *widerlegen* wir die Aussage $A \wedge \neg B$, und benutzen dabei das Pumping Lemma vorwärts, denn wir nehmen ja L als regulär an.

[5] Wir haben hier w bewusst abhängig von der PL Zahl gewählt – Schließlich muss wegen der verdrehten Quantoren nurnoch *ein* w existieren

Beim Beweis aus 3.2 benutzen wir die *Gegenaussage* des Pumping Lemmas und führen mit deren Hilfe einen *direkten* Beweis durch. Wir zeigen nichts weiter als dass die Implikationskette $A \to \neg S \stackrel{\text{PL}}{\to} \neg R \to B$ gilt, womit auch $A \to B$ gilt.

Man sollte sich hier nicht verwirren lassen und denken beide Verfahren machen das gleiche.

4 Tücken des Pumping Lemma

Das Pumping Lemma liefert nur eine Implikation („$\Rightarrow$"), und keine Äquivalenz („$\Leftrightarrow$"). Wenn man also für eine Sprache L zeigen kann, dass im PL B erfüllt ist[6], dann heißt das noch lange nicht dass L auch regulär ist!

Man kann jedoch für jede reguläre Sprache L eine Belegung der Werte n, u, v und x so angeben dass das PL erfüllt wird. Dies wird auch ganz gerne mal in Klausuren gefragt.

Da endliche Sprachen insbesondere auch regulär sind, müsste es, entgegen der Intuition[7], auch eine Belegung obiger Werte geben. Die gibt es natürlich auch, denn eine endliche Sprache enthält immer ein längstes Wort w. Wählt man nun n so dass $n > |w|$ so ist die Menge der Wörter, die länger als n sind, leer. Eine allquantifizierte Aussage über einer leeren Menge ist nun trivialerweise wahr.

[6] Oder anders gesprochen: Wenn es bei dem Verfahren aus 3.2 nicht gelingt die Aussage $\neg B$ des PL zu erfüllen

[7] Man kann hier ja u.U. garnichts aufpumpen, zum Beispiel bei $L = \{a\}$