Aufgaben zum Tut am 06.02.2006

Thomas Pajor

11. Februar 2006

Aufgabe 1)

Gegeben sei die „Funktion von Pajor“ Φ, die rekursiv wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned}
\Phi(x,0) &:= x+1 \\
\Phi(0,y) &:= y+1 \\
\Phi(x,y) &:= \Phi(\Phi(x-1,y),y-1)
\end{aligned}$$

(a) Geben Sie einen Algorithmus in Pseudo–Code an, der Φ berechnet.

(b) Zeigen Sie, dass Φ eine total berechenbare Funktion ist.

(c) Zeigen Sie: $x < \Phi(x,y)$ für alle $y \in \mathbb{N}$.

Lösung.

(a) Folgender Algorithmus in Pseudo–Code realisiert Φ:

Algorithm 1 $\Phi(x,y)$

```
if y = 0 then
   return x + 1
else if x = 0 then
   return y + 1
else
   return Φ(Φ(x − 1, y), y − 1)
end if
```

(b) Um zu zeigen, dass Φ total berechenbar ist, stützen wir uns auf das Programm aus Aufgabe (a), und zeigen, dass es für jede Eingabe terminiert.

Wir führen zunächst Induktion über y und im Induktionschritt von y eine Induktion über x.

IA: Sei $y = 0$. Das Programm terminiert nach Voraussetzung und es gilt $\Phi(x, 0) = x + 1$, es terminiert also für alle $x \in \mathbb{N}$.

IV: Das Programm terminiere für alle $x \in \mathbb{N}$ und ein festes $y \in \mathbb{N}$.

IS: $y \rightsquigarrow y + 1$: Wir führen nun Induktion über x.

IA: $x = 0$: Das Programm terminiert offensichtlich, und es gilt $\Phi(0, y + 1) = y + 2$.

IV: Die Behauptung gelte für ein festes x.

IS: Betrachte $\Phi(x + 1, y + 1) = \Phi(\Phi(x, y + 1), y)$. Nach IV (von x) terminiert der innere Ausdruck $\Phi(x, y + 1)$, und damit nach IV (von y) auch der äußere Ausdruck.

$\Rightarrow$ Φ ist total berechenbar. $\square$

(c) Wir führen verschachtelte Induktion. Zunächst induzieren wir über y, und zeigen dass die Behauptung für alle $x \in \mathbb{N}$ im Induktionanfang gilt. Im Induktionsschritt ist dann der Schritt $y \rightsquigarrow y + 1$ zu zeigen. Dass dieser auch für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt, zeigen wir dann durch eine zweite Induktion über x.

IA: Sei $y = 0$. Dann gilt $\Phi(x, 0) = x + 1 > x$ für alle $x \in \mathbb{N}$ offenbar erfüllt.

IV: Die Behauptung gelte für alle x und ein festes y.

IS: $y \rightsquigarrow y + 1$. Wir zeigen dass dieser Schritt für alle x gilt, in dem wir eine Induktion über x durchführen.

IA: Für $x = 0$ gilt $\Phi(0, y + 1) = y + 2 > 0$.

IV: Dies ist die innere Induktionsvoraussetzung für x. Die Behauptung „$y < \Phi(x, y)$“ gilt also für beliebiges x und beliebiges $y + 1$ (weil wir ja im äußeren IS bei $y + 1$ sind).

IS: Wir zeigen $x \rightsquigarrow x + 1$ und $y \rightsquigarrow y + 1$. Dabei gilt:

$$\begin{aligned} \Phi(x + 1, y + 1) &= \Phi(\Phi(x, y + 1), y) \\ &> \Phi(x, y + 1) \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung von } y) \\ &> x \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung von } x) \end{aligned}$$

Insgesamt folgt damit wieder $\Phi(x + 1, y + 1) > x + 1$ was zu zeigen war.

$\square$

Aufgabe 2) [Wiederholung]

Zwei reguläre Ausdrücke sind gleich, wenn sie die gleiche Sprache beschreiben. Zeigen Sie die folgenden Gleichungen für beliebige reguläre Ausdrücke A, B und C.

(a) $A(B \cup C) = (AB \cup AC)$

(b) $(AB \cup A)^* A = A(BA \cup A)^*$

Lösung

(a) Sei L_A die Sprache die durch A beschrieben wird, L_B die Sprache die durch B und L_C die Sprache die durch C beschrieben wird.

Betrachte

$$\begin{aligned} L_A(L_B \cup L_C) &= \{w \in \Sigma^* \mid w = xy \text{ mit } x \in L_A \land y \in (L_B \cup L_C)\} \\ &= \{w \in \Sigma^* \mid w = xy \text{ mit } x \in L_A \land (y \in L_B \lor y \in L_C)\} \\ &= \{w \in \Sigma^* \mid w = xy \text{ mit } x \in L_A \land y \in L_B \lor x \in L_A \land y \in L_C)\} \\ &= \{w \in \Sigma^* \mid w \in (L_A L_B \cup L_A L_C)\} \\ &= (L_A L_B \cup L_A L_C) \end{aligned}$$

□

(b) Sei $L_1^{(n)} := (AB \cup A)^n A$ und $L_2^{(n)} := A(BA \cup A)^n$.

Wir zeigen $L_1^{(n)} = L_2^{(n)}$ mittels Induktion über n.

IA: Sei $n = 0$. Es gilt $\varepsilon \cdot A = A \cdot \varepsilon$. Somit ist der IA erfüllt.

IV: Behauptung gelte für beliebiges und festes n.

IS: $n \rightsquigarrow n + 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned} L_1^{(n+1)} &= (AB \cup A)^{n+1} A \\ &= (AB \cup A)^n \cdot (AB \cup A) \cdot A \\ &\overset{(a)}{=} (AB \cup A)^n \cdot (ABA \cup AA) \\ &\overset{(a)}{=} (AB \cup A)^n \cdot A \cdot (BA \cup A) \\ &\overset{\text{IV}}{=} A \cdot (BA \cup A)^n \cdot (BA \cup A) \\ &= A(BA \cup A)^{n+1} \\ &= L_2^{(n+1)} \end{aligned}$$

Es gilt also $L_1^{(n)} = L_2^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und damit folgt dass gilt

$$(AB \cup A)^* A = A(BA \cup A)^*$$

□

Aufgabe 3) [Wiederholung]

Gegeben sei folgender DEA $\mathcal{A}$ aus Abbildung (1).

(a) Minimieren Sie $\mathcal{A}$ durch ein systematisches Verfahren.

(b) Weisen Sie die Minimalität nach, indem Sie für jedes Zustandspaar p, q mit $p \neq q$ ein Wort angeben, das die Nichtäquivalenz belegt.

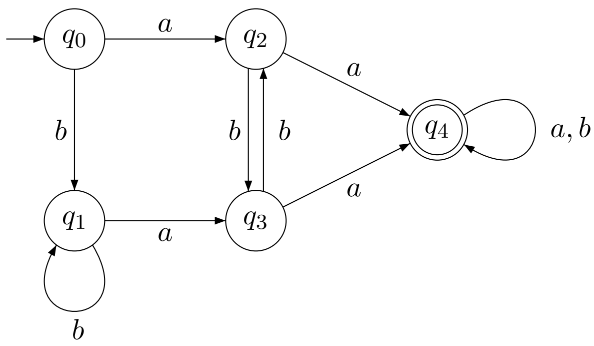

Abbildung 1: Automat zu Aufgabe 3)

Lösung

(a) Betrachte die Klasse A von Zuständen mit $A := Q$.

- Wörter der Länge 0: ε. Dieses trennt A in $B_1 := [q_0, q_1, q_2, q_3]$ und $B_2 := [q_4]$. B_2 ist dabei neuer Endzustand.
- Wörter der Länge 1:
  - a trennt B_1 in $C_1 := [q_0, q_1]$ und $C_2 := [q_2, q_3]$.
  - b trennt nichts.

  Es sei $C_3 := B_2$.
- Wörter der Länge 2: aa, ab, ba, bb. Keines dieser Wörter trennt eine der Klassen C_i ($i = 1, 2, 3$).

Somit ergibt sich der Minimalautomat aus Abbildung (2).

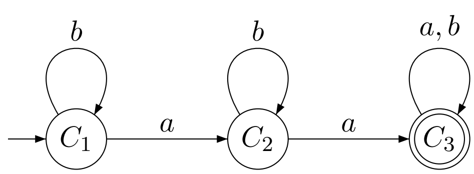

Abbildung 2: Minimalautomat zu Aufgabe 3)

(b) Zeugen für die Nichtäquivalenz:

- C_1 und C_2 werden durch a getrennt, da $\delta(C_1, a) \notin F$ aber $\delta(C_2, a) \in F$.
- C_2 und C_3 werden durch b getrennt, da $\delta(C_2, b) \notin F$ aber $\delta(C_3, b) \in F$.
- C_1 und C_3 werden durch bb getrennt, denn $\delta(C_1, bb) \notin F$ aber $\delta(C_3, bb) \in F$.