Aufgaben zum Tut am 23.01.2006

Thomas Pajor

23. Januar 2006

Aufgabe 1)

Gegeben sei folgende kontextfreie Grammatik $G := (V := \{S\}, \Sigma := \{(,)\}, P, S)$ mit

$$P := \{S \rightarrow SS, \tag{1}$$
$$S \rightarrow (S), \tag{2}$$
$$S \rightarrow ()\} \tag{3}$$

(a) Wandeln Sie G in Chomsky–Normalform G'.

(b) Prüfen Sie mit dem Algorithmus von COCKE–YOUNGER–KASAMI ob die Wörter $w_1 := ()()(())$ und $w_2 := ()())$ in $L(G)$ enthalten sind und geben Sie ggf. eine Ableitungsfolge $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ an.

(c) Geben Sie einen nichtdeterministischen Kellerautomaten $\mathcal{K}$ an, der $L(G)$ mit leerem Keller akzeptiert.

Lösung.

(a) Überführung von G in Chomsky Normalform $G' := (V', \Sigma, P', S)$ gemäß des Verfahrens aus dem Tutorium vom 16.01.2006:

1. Elimination von Terminalzeichen (auf der rechten Seite). Wir führen für jedes Symbol aus Σ zwei neue Variablen $Y_($ und $Y_)$ ein. Die Produktionen ändern sich wie folgt:

$$\begin{aligned} P_1 := \{S &\rightarrow SS \mid Y_(SY_) \mid Y_(Y_), \\ Y_(&\rightarrow (, \\ Y_) &\rightarrow)\} \end{aligned}$$

2. Rechte Seiten verkürzen. Die einzige Produktion in P_1, die zu lang ist, ist die Produktion $S \to Y_(S Y_)$. Wir führen also eine neue Variable C ein, und ersetzen P_1 durch P_2 wie folgt:

$$\begin{aligned} P_2 := \{ & S \to SS \mid Y_(C \mid Y_(Y_), \\ & C \to S Y_), \\ & Y_(\to (, \\ & Y_) \to) \} \end{aligned}$$

3. Da wir keine Kettenproduktionen haben, sind wir fertig, und es gilt $G' = (\{S, Y_(, Y_), C\}, \Sigma, P_2, S)$ ist in Chomsky–Normalform.

(b) Anwendung des Algorithmus von COCKE–YOUNGER–KASAMI ergibt folgende Tabellen:

Prüfung ob $w_1 \in L(G)$:

	(	)	(	)	(	(	)	)
1	$Y_($	$Y_)$	$Y_($	$Y_)$	$Y_($	$Y_($	$Y_)$	$Y_)$
2	S	-	S	-	-	S	-	
3	-	-	-	-	-	C		
4	S	-	-	-	S			
5	-	-	-	-				
6	-	-	S					
7	-	-						
8	S							

Der Übersicht wegen, habe ich hier nicht die Mengenschreibweise verwendet. Korrekterweise muss jeder Eintrag in der Tabelle eine Menge sein, da es sein kann dass ein Eintrag mehrere Elemente enthalten kann (ist hier nicht der Fall). Formal korrekt wäre auch $\emptyset$ statt „-“ zu schreiben.

Da der Eintrag $(1, 8)$ das Symbol S enthält, lässt sich w_1 aus S ableiten, und somit gilt $w_1 \in L(G)$.

Eine gültige Ableitungsfolge ist:

$$\begin{aligned} & S \Rightarrow SS \Rightarrow SSS \Rightarrow Y_(Y_) SS \Rightarrow Y_(Y_) Y(Y_) S \Rightarrow Y_(Y_) Y_(Y_) Y_(C \\ & \Rightarrow Y_(Y_) Y_(Y_) Y_(S Y_) \Rightarrow Y_(Y_) Y_(Y_) Y_(Y_(Y_) Y_) \overset{*}{\Rightarrow} ()()(()) \end{aligned}$$

Prüfung ob $w_2 \in L(G)$:

	(	)	(	)	)
1	$Y_($	$Y_)$	$Y_($	$Y_)$	$Y_)$
2	S	-	S	-	
3	-	-	-		
4	S	-			
5	C				

Der Eintrag $(1, 5)$ enthält nicht das Startsymbol S. Somit lässt sich w_2 nicht aus S ableiten, und es gilt $w_2 \notin L(G)$.

(c) Wir konstruieren aus G einen NKA $\mathcal{K} = (\{z\}, \Sigma, \Sigma \cup V, \delta, z, S)$ mit einem Zustand z, wobei δ durch folgende Tabelle definiert wird:

$(z, \downarrow, \rightarrow)$	S	$($	$)$
ε	$\{SS, (S), ()\}$	$\{\}$	$\{\}$
$($	$\{\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\}$
$)$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\varepsilon\}$