Aufgaben zum Tut am 19.12.2005

Thomas Pajor

19. Dezember 2005

Aufgabe 1)

Eine Relation $\rho \subseteq M \times M$ heißt *transitiv*, falls für alle $a, b, c \in M$ gilt:

$$a\rho b \wedge b\rho c \Rightarrow a\rho c$$

Sei $\leq_p$ die Relation „polynomiell reduzierbar“ wie in der Vorlesung definiert.

Zeigen Sie: $\leq_p$ ist transitiv.

Lösung

Seien A, B, C beliebige Sprachen, und es gelte $A \leq_p B$ und $B \leq_p C$. Nach Definition von $\leq_p$ existieren somit zwei berechenbare Funktionen f und g, wobei:

$$\forall w \in \Sigma^* : w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B \qquad \text{und} \qquad \forall w \in \Sigma^* : w \in B \Leftrightarrow g(w) \in C$$

Weiterhin existieren zwei Polynome p und q, so dass gilt:

$$f \in \mathrm{TIME}(p(n)) \qquad \text{und} \qquad g \in \mathrm{TIME}(q(n))$$

Betrachte nun die Abbildung $\Phi := g \circ f$. Nach Definition von f und g gilt für Φ:

$$\forall w \in \Sigma^* : w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B \Leftrightarrow \underbrace{g(f(w))}_{=\Phi(w)} \in C$$

Also insbesondere $\forall w \in \Sigma^* : w \in A \Leftrightarrow \Phi(w) \in C$.

Da die Hintereinanderausführung der Polynome p und q selbst auch wieder ein Polynom ist, gibt es ein Polynom r, so dass

$$\Phi \in \mathrm{TIME}(r(n))$$

Also ist $A \leq_p C$ und somit $\leq_p$ transitiv. $\square$

Aufgabe 2)

Eine Clique der Größe K in einem Graph $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge der Knoten $V' \subseteq V$ mit $|V'| = K$, so dass diese vollständig verbunden sind, also

$$\forall u, v \in V', u \neq v : \{u, v\} \in E$$

Das Problem HALFCLIQUE ist wie folgt definiert:

Gegeben: Ein Graph $G = (V, E)$ mit $|V|$ gerade.
Frage: Gibt es in G eine Clique der Größe $\frac{|V|}{2}$?

Zeigen Sie: HALFCLIQUE ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Lösung

- HALFCLIQUE $\in \mathcal{NP}$: Eine geratene Lösung zu einer Instanz von HALFCLIQUE lässt sich analog zu CLIQUE in polynomieller Zeit überprüfen.
- HALFCLIQUE ist $\mathcal{NP}$-hart:

  Wir reduzieren CLIQUE auf HALFCLIQUE, also CLIQUE $\leq_p$ HALFCLIQUE. Zu jeder Instanz $I := (V, E, K)$ von CLIQUE müssen wir eine Instanz $I' = (V', E')$ von HALFCLIQUE konstruieren, und zwar so dass gilt

  $$I \text{ hat Clique der Größe } K \quad \Leftrightarrow \quad I' \text{ hat Clique der Größe } \frac{|V'|}{2}$$

  Sei nun $I = (V, E, K)$ eine beliebige Instanz von CLIQUE, wobei $|V| =: n$. Konstruiere einen neuen Graph (V', E') wie folgt:

  $$V' := V \cup W \quad \text{wobei} \quad W := \{w_1, \ldots, w_n\} \text{ und } V \cap W = \emptyset$$

  Wir fügen also n neue Knoten hinzu, somit ist $|V'| = 2n$ immer gerade.

  Nun verbinden wir $n - K$ der neuen Knoten mit *allen* Knoten in V', also

  $$E' := E \cup \{\{v', w_i\} \mid v' \in V', i = 1, \ldots, n - K\}$$

  Gab es in I eine Clique der Größe K, so gibt es wegen der Konstruktion in I' eine Clique der Größe $K + (n - K) = n = \frac{2n}{2} = \frac{|V'|}{2}$. Gab es hingegen in I keine Clique der Größe K, so kann es auch in I' keine Clique der Größe $\frac{|V'|}{2}$ geben. Die Transformation wird in Abbildung (1) veranschaulicht.

  Die Konstruktion hat einen Aufwand von $\mathcal{O}(|E| + |V|)$ und ist daher polynomiell.

  $\Rightarrow$ HALFCLIQUE ist $\mathcal{NP}$-hart.

$\Rightarrow$ HALFCLIQUE ist $\mathcal{NP}$-vollständig. $\square$

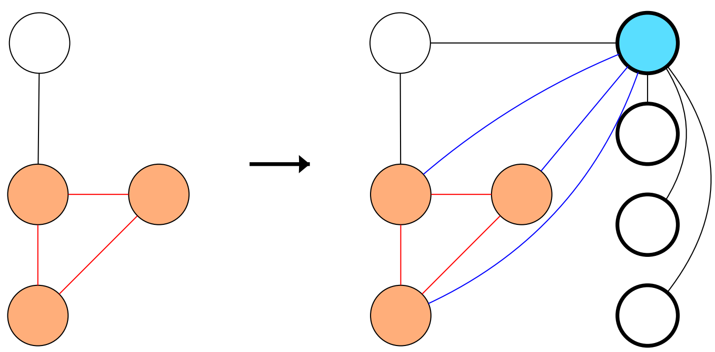

Abbildung 1: Transformation einer CLIQUE Instanz $I = (V, E, 3)$ in eine HALFCLIQUE Instanz $I' = (V', E')$. Die Roten Knoten bilden eine Clique in I. Man sieht, dass es dann auch in I' eine Clique der Größe $\frac{|V'|}{2}$ gibt, die dadurch induziert wird, dass gerade $|V| - K$, also hier einer, der neuen (dick gezeichneten) Knoten mit *allen* Knoten verbunden werden.