Aufgaben zum Tut am 21.11.2005

Thomas Pajor

21. November 2005

Aufgabe 1)

Vermöge $\Sigma := \{0, 1\}$, und sei $L \subseteq \Sigma$ definiert durch

$$L := \{1^{2j} \mid j \geq 1\}$$

(a) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen von Σ^* bezüglich der Nerode Relation zu L.

(b) Leiten Sie aus den Äquivalenzklassen einen (minimalen) DEA ab.

Lösung

(a) Folgende Äquivalenzklassen ergeben sich:

- $[\varepsilon] := \{\varepsilon\}$
- $[0] := \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält die } 0\}$
- $[1] := \{w \in \Sigma^* \mid w = 1^{2k-1}, k \in \mathbb{N}\}$
- $[11] := \{w \in \Sigma^* \mid w = 1^{2k}, k \in \mathbb{N}\}$

Offensichtlich sind alle Wörter $w \in \Sigma^*$ durch eine Klasse abgedeckt, das heißt es existieren keine weiteren Klassen. Man kann sich anhand der Repräsentanten auch klarmachen dass keine zwei Klassen zusammenfallen, da alle Repräsentanten nicht zueinander äquivalent sind (Zum Beispiel: $1 \not\equiv 11$ denn für $z = 1$ gilt $1z \in L$ aber $11z \notin L$).

(b) Der minimale DEA ist in Abbildung (1) angegeben.

Aufgabe 2)

Zu $\Sigma := \{0\}$ sei die Sprache

$$L := \{0^{k^2} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

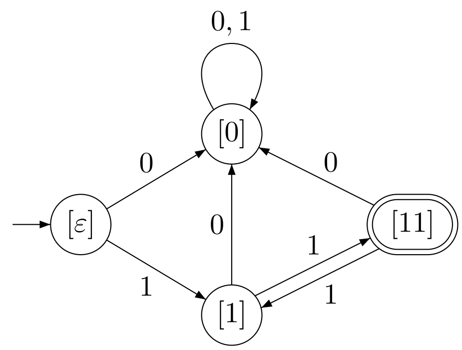

Abbildung 1: Minimaler DEA zu Aufgabe 1b)

also die Sprache aller Wörter mit quadratischer Länge, definiert.

Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemma, dass L nicht regulär ist.

Lösung

Sei $n \in \mathbb{N}$ die Zahl aus dem Pumping Lemma. Betrachte zu jedem n das Wort $w = 0^{n^2} \in L$, bzw. $w = 0^4$, falls $n = 1$. Somit ist $|w| > n$ für jedes n erfüllt.

Sei nun $w = uvx$ eine beliebige Zerlegung von w wobei gelte $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$. Für jede Wahl von u,v und x gilt jedoch

$$uv^2x = 0^{n^2+|v|} \notin L$$

denn

$$n^2 < n^2 + |v| \leq n^2 + n < (n+1)^2$$

Somit gibt es kein $k \in \mathbb{N}$ mit $0^{n^2+|v|} = 0^{k^2}$.

$\Rightarrow L$ ist nicht regulär. $\square$

Aufgabe 3)

Sei $\Sigma := \{0, 1\}$. Zeigen Sie unter Verwendung des Pumping Lemma, dass die Sprache der Palindrome gerader Länge, also

$$L := \{ww^R \mid w \in \Sigma^*\}$$

nicht regulär ist.

Lösung

Sei n die Pumping Lemma Zahl und sei zu jedem n das Wort $w = 0^n 110^n \in L$. Also ist $|w| > n$. Es gilt dann für alle Zerlegungen $w = uvx$ mit $|uv| \leq n$, $v \neq \varepsilon$

$$uv^0w = 0^l 110^n \quad \text{wobei} \quad l < n$$

Also ist $uv^0w \notin L$.

$\Rightarrow L$ ist nicht regulär. $\square$

Aufgabe 4)

Konstruieren Sie eine (deterministische) Turingmaschine $\mathcal{M}$ die zu einer auf dem Band stehenden Binärzahl $w \in \{0,1\}^*$ (binär) eins addiert. Dabei sei die Eingabe w frei von führenden Nullen.

Lösung

Die in Abbildung (2) dargestellte Turingmaschine leistet das Gewünschte.

Funktionsweise: Die Turingmaschine liest die erste 1 und geht in den Zustand q_1. Hier fährt sie mit dem Kopf bis ans Ende des Wortes. Im Zustand q_2 geht sie das Wort nun rückwärts ab und ersetzt jede 1 durch eine 0. Wird irgendwann eine 0 gelesen so fährt sie den Kopf bis ans Anfang des Wortes (via q_3) und hält in f. Wird keine 0, sondern ein $\sqcup$ gelesen, so wird dieses durch eine 1 ersetzt und die TM hält ebenfalls in f.

Die Zustände q_4 und q_5 dienen der Sonderbehandlung für $w = 0$.

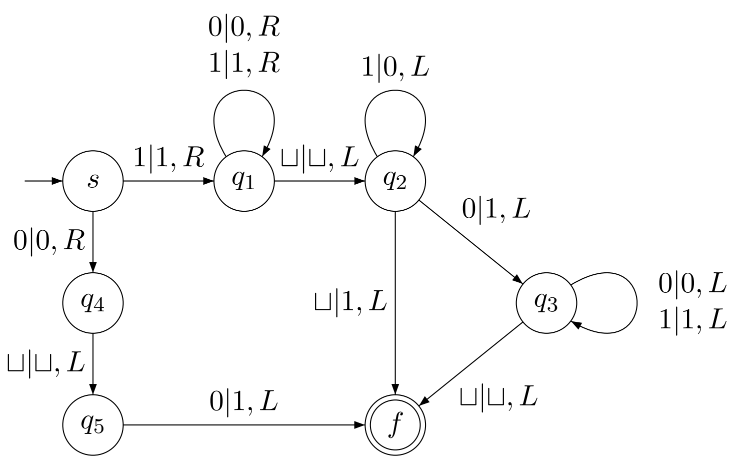

Abbildung 2: Turingmaschine die binär $+1$ addiert.