Aufgaben zum Tut am 7.11.2005

Thomas Pajor

6. November 2005

Aufgabe

Zeigen Sie, dass der Kleene'sche Abschluss eine Hüllenoperation ist.

Beweis

Der Kleene'sche Abschluss zu einer formalen Sprache L ist definiert durch

$$L^* := \bigcup_{i \geq 0} L^i$$

- Extensionalität: Zu zeigen ist, dass gilt $L \subseteq L^*$.
  Sei $w \in L$. Wegen
  $$L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i = L^0 \cup L \cup L^2 \cup \ldots$$
  ist $w \in L^*$. Damit folgt $L \subseteq L^*$.
- Idempotenz. Zu zeigen ist $L^* = (L^*)^*$. Wir zeigen dazu $L^* \subseteq (L^*)^*$ und $(L^*)^* \subseteq L^*$.
  Wegen der Extensionalität ist $L^* \subseteq (L^*)^*$ trivial.
  Sei also $w \in (L^*)^*$. Es existiert somit eine Zerlegung $w = w_1 w_2 \cdots w_k$ mit $w_i \in L^*$. Weiter lässt sich jedes w_i zerlegen in $w_i = w_{i1} \cdots w_{in_i}$ mit $w_{ij} \in L$.
  $$\Rightarrow w = w_{11} \cdots w_{1n_1} w_{21} \cdots w_{2n_2} \cdots \cdots w_{kn_k}$$
  Also ist $w \in L^*$ und es folgt $L^* \subseteq (L^*)^*$.
  $\Rightarrow L^* = (L^*)^*$.

- Monotonie: Zu zeigen ist dass für $L_1 \subseteq L_2$ auch $L_1^* \subseteq L_2^*$ gilt.

  Seien also $L_1 \subseteq L_2$ beliebige Sprachen. Weiterhin $w \in L_1^*$.

  $\Rightarrow \exists$ Zerlegung $w = w_1 \cdots w_k$ mit $w_i \in L_1$. Wegen $L_1 \subseteq L_2$ folgt damit dass $w_i \in L_2$, und damit $w \in L_2^*$.

  $\Rightarrow L_1^* \subseteq L_2^*$.

$\square$

Aufgabe

Sei $\Sigma := \{a, b, c\}$. Konstruieren Sie einen endlichen Automaten, der folgende Sprache akzeptiert:

$$L := \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ endet mit } a(bc)^k,\ k \geq 1\}$$

Der Automat muss nicht deterministisch sein.

Lösung

Folgender Automat wäre eine Lösung: