Info IV Tutorium

Thomas Pajor

Fakultät für Informatik

IBDS Prautzsch

9. Juli 2007

Organisatorisches

Nächste Woche ist letztes Tutorium. Mein Vorhaben:

Organisatorisches

Nächste Woche ist letztes Tutorium. Mein Vorhaben:

- JPEG-Kompression (inkl. diskreter Cosinustransformation)

Organisatorisches

Nächste Woche ist letztes Tutorium. Mein Vorhaben:

- JPEG-Kompression (inkl. diskreter Cosinustransformation)
- Wiederholung

Organisatorisches

Nächste Woche ist letztes Tutorium. Mein Vorhaben:

- JPEG-Kompression (inkl. diskreter Cosinustransformation)
- Wiederholung
  $\rightsquigarrow$ Themenwünsche schickt mir am besten per E-Mail!

Organisatorisches

Nächste Woche ist letztes Tutorium. Mein Vorhaben:

- JPEG-Kompression (inkl. diskreter Cosinustransformation)
- Wiederholung
  $\rightsquigarrow$ Themenwünsche schickt mir am besten per E-Mail!

Achtung: Ich habe nicht alle Vorlesungsthemen im Tut behandelt!

Organisatorisches

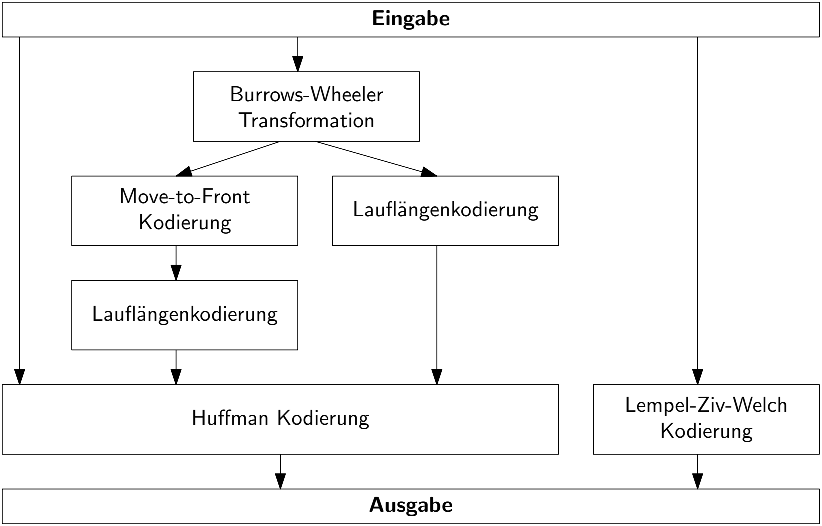
Nächste Woche ist letztes Tutorium. Mein Vorhaben:

- JPEG-Kompression (inkl. diskreter Cosinustransformation)
- Wiederholung
  $\rightsquigarrow$ Themenwünsche schickt mir am besten per E-Mail!

Achtung: Ich habe nicht alle Vorlesungsthemen im Tut behandelt!

- Für die Klausur sind *alle* Themen aus der Vorlesung relevant.

Verlustfreie Kodierungen



Aufgabe 2.

Gegeben sei folgende Nachricht.

$$\alpha := \textit{rokokokostuem}$$

(a) Kodieren Sie die Nachricht mittels LZW. Neue Wörterbucheinträge können ab dem Index 256 erzeugt werden.

(b) Dekodieren Sie die aus Aufgabe (a) erhaltene Nachricht mit dem LZW-Verfahren.

Optimaler, Redundanzfreier Kode

Ein Alphabet $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_8\}$ mit 8 gleichverteilten Symbolen kann wie folgt optimal kodiert werden.

x_1:	000	x_5:	100
x_2:	001	x_6:	101
x_3:	010	x_7:	110
x_4:	011	x_8:	111

Optimaler, Redundanzfreier Kode

Ein Alphabet $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_8\}$ mit 8 gleichverteilten Symbolen kann wie folgt optimal kodiert werden.

x_1:	000	x_5:	100
x_2:	001	x_6:	101
x_3:	010	x_7:	110
x_4:	011	x_8:	111

Der Sender sendet $x = 010$, der Empfänger erhält $y = 011$. Ist x_3 oder x_4 gemeint?

Anfügen eines Paritätsbits

Anfügen eines zusätzlichen Bits c_4 an jedes Kodewort der Form

$$c_4 := c_1 + c_2 + c_3 \quad \Rightarrow \quad c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0$$

ergibt

x_1:	0000	x_5:	1001
x_2:	0011	x_6:	1010
x_3:	0101	x_7:	1100
x_4:	0110	x_8:	1111

Anfügen eines Paritätsbits

Anfügen eines zusätzlichen Bits c_4 an jedes Kodewort der Form

$$c_4 := c_1 + c_2 + c_3 \quad \Rightarrow \quad c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0$$

ergibt

x_1:	0000	x_5:	1001
x_2:	0011	x_6:	1010
x_3:	0101	x_7:	1100
x_4:	0110	x_8:	1111

Der Sender sendet $x = 0101$, der Empfänger erhält $y = 0111$.

Anfügen eines Paritätsbits

Anfügen eines zusätzlichen Bits c_4 an jedes Kodewort der Form

$$c_4 := c_1 + c_2 + c_3 \quad \Rightarrow \quad c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0$$

ergibt

x_1:	0000	x_5:	1001
x_2:	0011	x_6:	1010
x_3:	0101	x_7:	1100
x_4:	0110	x_8:	1111

Der Sender sendet $x = 0101$, der Empfänger erhält $y = 0111$.

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0 + 1 + 1 + 1 = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ FEHLER!

Generatormatrix (Bei Linearen Kodes)

Generatormatrix zum Paritätskode C. Es gilt $\dim C = 3 =: k$.

x_1:	0000	x_5:	1001
x_2:	0011	x_6:	1010
x_3:	0101	x_7:	1100
x_4:	0110	x_8:	1111

$$G := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung eines Kodewortes aus der Eingabe $x \in \mathbb{B}^k$ mit $c := Gx$.

Kontrollmatrix

x_1:	0000	x_5:	1001
x_2:	0011	x_6:	1010
x_3:	0101	x_7:	1100
x_4:	0110	x_8:	1111

$$G := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Kontrollmatrix

x_1:	0000	x_5:	1001
x_2:	0011	x_6:	1010
x_3:	0101	x_7:	1100
x_4:	0110	x_8:	1111

$$G := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Kontrollmatrix A besteht (zeilenweise) aus der Basis des Kerns von G:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Kontrollmatrix

x_1:	0000	x_5:	1001
x_2:	0011	x_6:	1010
x_3:	0101	x_7:	1100
x_4:	0110	x_8:	1111

$$G := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Kontrollmatrix A besteht (zeilenweise) aus der Basis des Kerns von G:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sender sendet $x = 0101$; Empfänger erhält $y = 0111$.

Kontrollmatrix

x_1:	0000	x_5:	1001
x_2:	0011	x_6:	1010
x_3:	0101	x_7:	1100
x_4:	0110	x_8:	1111

$$G := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Kontrollmatrix A besteht (zeilenweise) aus der Basis des Kerns von G:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sender sendet $x = 0101$; Empfänger erhält $y = 0111$.

$$Ay = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top = 1$$

$\Rightarrow$ FEHLER!

Hamming-Kodes

Hamming-Kode für 3 Informationsbits und m Testbits.

Hamming-Kodes

Hamming-Kode für 3 Informationsbits und m Testbits.

Wegen $n - m = 3$ und $n \leq 2^m$ folgt

$$n - m \leq 2^m - m \quad \Leftrightarrow \quad 3 \leq 2^m - m.$$

Das ist für $m = 3$ erfüllt. $\Rightarrow$ 3 Testbits.

Hamming-Kodes

Hamming-Kode für 3 Informationsbits und m Testbits.

Wegen $n - m = 3$ und $n \leq 2^m$ folgt

$$n - m \leq 2^m - m \quad \Leftrightarrow \quad 3 \leq 2^m - m.$$

Das ist für $m = 3$ erfüllt. $\Rightarrow$ 3 Testbits.

Eine Kontrollmatrix mit $n = 6$ verschiedenen Spalten ist beispielsweise

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Generatormatrix für Hamming-Kodes

Die zugehörige Generatormatrix ist (spaltenweise) die Basis des Kerns von A.

Generatormatrix für Hamming-Kodes

Die zugehörige Generatormatrix ist (spaltenweise) die Basis des Kerns von A.

Generatormatrix:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Generatormatrix für Hamming-Kodes

Die zugehörige Generatormatrix ist (spaltenweise) die Basis des Kerns von A.

Generatormatrix:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Kodes zu $x_2 = 010$:

$$c_2 := G \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hamming-Kodes

Die Kodewörter zu dem Alphabet $\mathcal{X}$ mit

x_1:	000	x_5:	100
x_2:	001	x_6:	101
x_3:	010	x_7:	110
x_4:	011	x_8:	111

sind demnach

c_1:	000000	c_5:	010101
c_2:	111000	c_6:	101101
c_3:	100110	c_7:	110011
c_4:	011110	c_8:	001011

Hamming-Kodes: Fehlerkorrektur

Der Sender sendet $c_3 = 100110$, der Empfänger erhält aber $y = 101110$.

Hamming-Kodes: Fehlerkorrektur

Der Sender sendet $c_3 = 100110$, der Empfänger erhält aber $y = 101110$.

Berechnung von Ay liefert

$$\begin{aligned} Ay &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top \\ &= A_3 \end{aligned}$$

Der Sender sendet $c_3 = 100110$, der Empfänger erhält aber $y = 101110$.

Berechnung von Ay liefert

$$
\begin{aligned}
Ay &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top \\
&= A_3
\end{aligned}
$$

Korrigierter Kode: $y' = 100110 = c_3 \equiv x_3$.