Info IV Tutorium

Thomas Pajor

Fakultät für Informatik

IBDS Prautzsch

18. Juni 2007

Wiederholung: Grundlagen der WT

Wir betrachten Zufallsexperimente (Z.B. Werfen eines Würfels).

Wir betrachten Zufallsexperimente (Z.B. Werfen eines Würfels).

- Die Möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments werden im *Wahrscheinlichkeitsraum* Ω zusammengefasst.

Wiederholung: Grundlagen der WT

Wir betrachten Zufallsexperimente (Z.B. Werfen eines Würfels).

- Die Möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments werden im *Wahrscheinlichkeitsraum* Ω zusammengefasst.
- Eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ heißt *Ereignis*, bei $|A| = 1$ spricht man von einem *Elementarereignis*.

Wir betrachten Zufallsexperimente (Z.B. Werfen eines Würfels).

- Die Möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments werden im *Wahrscheinlichkeitsraum* Ω zusammengefasst.
- Eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ heißt *Ereignis*, bei $|A| = 1$ spricht man von einem *Elementarereignis*.
- Die *Wahrscheinlichkeitsfunktion* $P : \Omega \rightarrow [0, 1]$ ordnet jedem Ereignis die Auftrittswahrscheinlichkeit zu.

Wiederholung: Grundlagen der WT

Wir betrachten Zufallsexperimente (Z.B. Werfen eines Würfels).

- Die Möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments werden im *Wahrscheinlichkeitsraum* Ω zusammengefasst.
- Eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ heißt *Ereignis*, bei $|A| = 1$ spricht man von einem *Elementarereignis*.
- Die *Wahrscheinlichkeitsfunktion* $P : \Omega \to [0, 1]$ ordnet jedem Ereignis die Auftrittswahrscheinlichkeit zu.
- Es gilt:
  - $P(\emptyset) = 0$

Wiederholung: Grundlagen der WT

Wir betrachten Zufallsexperimente (Z.B. Werfen eines Würfels).

- Die Möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments werden im *Wahrscheinlichkeitsraum* Ω zusammengefasst.
- Eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ heißt *Ereignis*, bei $|A| = 1$ spricht man von einem *Elementarereignis*.
- Die *Wahrscheinlichkeitsfunktion* $P : \Omega \to [0, 1]$ ordnet jedem Ereignis die Auftrittswahrscheinlichkeit zu.
- Es gilt:
  - $P(\emptyset) = 0$
  - $P(\Omega) = 1$

Wiederholung: Grundlagen der WT

Wir betrachten Zufallsexperimente (Z.B. Werfen eines Würfels).

- Die Möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments werden im *Wahrscheinlichkeitsraum* Ω zusammengefasst.
- Eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ heißt *Ereignis*, bei $|A| = 1$ spricht man von einem *Elementarereignis*.
- Die *Wahrscheinlichkeitsfunktion* $P : \Omega \to [0, 1]$ ordnet jedem Ereignis die Auftrittswahrscheinlichkeit zu.
- Es gilt:
  - $P(\emptyset) = 0$
  - $P(\Omega) = 1$
  - $P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$

Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten

- Vereinigung:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{=0 \text{ gdw } A \cap B = \emptyset}$$

Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten

- Vereinigung:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{=0 \text{ gdw } A \cap B = \emptyset}$$

- Bedingte Wahrscheinlichkeit (A unter Voraussetzung von B):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten

- Vereinigung:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{=0 \text{ gdw } A \cap B = \emptyset}$$

- Bedingte Wahrscheinlichkeit (A unter Voraussetzung von B):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Verbundwahrscheinlichkeit:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten

- Vereinigung:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{=0 \text{ gdw } A \cap B = \emptyset}$$

- Bedingte Wahrscheinlichkeit (A unter Voraussetzung von B):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Verbundwahrscheinlichkeit:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Wenn A und B unabhängige Ereignisse sind gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Zufallsvariablen

- Eine *Zufallsvariable* ordnet den Ergebnissen eines Zufallsexperiments *Werte* zu, sie ist also eine Abbildung

$$X : \Omega \to \Omega'$$

für eine Wertemenge Ω'.

Zufallsvariablen

- Eine *Zufallsvariable* ordnet den Ergebnissen eines Zufallsexperiments *Werte* zu, sie ist also eine Abbildung

$$X : \Omega \to \Omega'$$

  für eine Wertemenge Ω'.
- $P(X = x_i)$ ist die Wahrsch. dass X den Wert x_i annimmt.

Zufallsvariablen

- Eine *Zufallsvariable* ordnet den Ergebnissen eines Zufallsexperiments *Werte* zu, sie ist also eine Abbildung

$$X : \Omega \to \Omega'$$

  für eine Wertemenge Ω'.
- $P(X = x_i)$ ist die Wahrsch. dass X den Wert x_i annimmt.
  Abkürzungen:

$$P(X = x_i) = p(x_i) = p_i$$

Zufallsvariablen

- Eine *Zufallsvariable* ordnet den Ergebnissen eines Zufallsexperiments *Werte* zu, sie ist also eine Abbildung

$$X : \Omega \rightarrow \Omega'$$

  für eine Wertemenge Ω'.
- $P(X = x_i)$ ist die Wahrsch. dass X den Wert x_i annimmt.
  Abkürzungen:

$$P(X = x_i) = p(x_i) = p_i$$

- Der *Erwartungswert* einer diskreten Zufallsvariablen ist

$$E[X] = \sum_{i=1}^{|\Omega'|} x_i p_i$$

Unsicherheit / Information

Sei $\mathcal{X}$ ein Alphabet und P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über $\mathcal{X}$. Des Weiteren X eine Zufallsvariable die die Werte aus $\mathcal{X}$ annimmt.

Unsicherheit / Information

Sei $\mathcal{X}$ ein Alphabet und P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über $\mathcal{X}$. Des Weiteren X eine Zufallsvariable die die Werte aus $\mathcal{X}$ annimmt.

- Die *Unsicherheit* (Information) eines Zeichens $x_i \in \mathcal{X}$ ist

$$h(x_i) = -\log p_i$$

Unsicherheit / Information

Sei $\mathcal{X}$ ein Alphabet und P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über $\mathcal{X}$. Des Weiteren X eine Zufallsvariable die die Werte aus $\mathcal{X}$ annimmt.

- Die *Unsicherheit* (Information) eines Zeichens $x_i \in \mathcal{X}$ ist

$$h(x_i) = -\log p_i$$

- Die *Entropie* (Informationsgehalt) der Zufallsvariablen X ist

$$H(X) = -\sum_i p_i \log p_i$$

Unsicherheit / Information

Sei $\mathcal{X}$ ein Alphabet und P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über $\mathcal{X}$. Des Weiteren X eine Zufallsvariable die die Werte aus $\mathcal{X}$ annimmt.

- Die *Unsicherheit* (Information) eines Zeichens $x_i \in \mathcal{X}$ ist

$$h(x_i) = -\log p_i$$

- Die *Entropie* (Informationsgehalt) der Zufallsvariablen X ist

$$H(X) = -\sum_i p_i \log p_i$$

Man schreibt auch

$$H(X) = H(p_1, \ldots, p_n)$$

für $|\mathcal{X}| = n$.

Abschätzung

Lemma

Sind $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m \geq 0$ *mit*

$$\sum_{i=1}^{m} q_i \leq \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

Dann gilt

$$-\sum_i p_i \log p_i \leq -\sum_i p_i \log q_i$$

wobei Gleichheit nur gilt falls $p_i = q_i$ *für alle* $i = 1, \ldots, m$*.*

Abschätzung

Lemma

Sind $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m \geq 0$ *mit*

$$\sum_{i=1}^{m} q_i \leq \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

Dann gilt

$$-\sum_i p_i \log p_i \leq -\sum_i p_i \log q_i$$

wobei Gleichheit nur gilt falls $p_i = q_i$ *für alle* $i = 1, \ldots, m$.

Damit folgt

$$-\sum p_i \log p_i \leq -\sum p_i \log \frac{1}{m} = \log m$$

mit Gleichheit bei $p_i = \frac{1}{m}$.

Aufgabe 1.

Gegeben seien die Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_m$ mit $p_1 > p_2$. Definiere dazu

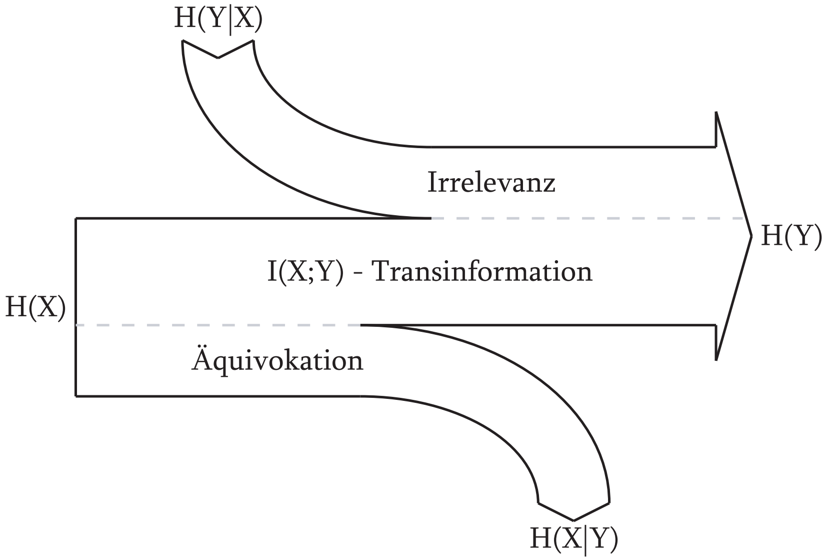
$$\begin{aligned} p_1' &= p_1 - \Delta p \\ p_2' &= p_2 + \Delta p \\ p_i' &= p_i \qquad\qquad \text{für } i = 3, \ldots, m \end{aligned}$$

wobei $\Delta p > 0$ und $p_1 - \Delta p \geq p_2 + \Delta p$.

Zeigen Sie, dass gilt

$$H(p_1', p_2', \ldots, p_m') > H(p_1, p_2, \ldots, p_m)$$

Der Übertragungskanal



Aufgabe 2.

Gegeben sei folgender binärer, asymetrischer Kanal über den Alphabeten $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$:

$$\begin{array}{ll} P(0|0) = 1 - \beta & P(1|0) = \beta \\ P(0|1) = 0 & P(1|1) = 1 \end{array}$$

(a) Für welches β hat der Kanal maximale Kapazität?

(b) Für welches $H(X)$ wird bei gegebener Wahrscheinlichkeitsverteilung β der Wert von $H(Y)$ maximal?

(c) Berechnen Sie Fehlinformation, Äquivokation und Transinformation für $\beta = 0.9$ und Gleichverteilung auf X (Sender).