Über die Simplex - Methode

Benjamin Vogel
tutorium [at] bvogel [punkt] de

27. Juli 2007

Dies soll ein Versuch sein, die Simplex-Methode in der Notation aus dem Manuskript [Pra07] etwas anschaulicher zu machen, im Zweifel (für die Klausur) gilt selbstverständlich das offizielle Material.

1 Das Verfahren

1.1 Die Normalform

Geg. $v \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Ges. maximiere $z = c^\top x + v$ $\quad x \in \mathbb{R}^m$
unter $y = Bx + b \geq 0$ $\quad y \in \mathbb{R}^n$
y_i heißen Basisvariablen, x_i Nichtbasisvariablen

Die Normalform erzwingt, dass man sich in der neu formulierten Koordinatendarstellung in y-Koordinaten in einer Ecke des Simplex befindet und sich dieser im "positiven Hyperquadranten" erstreckt.

Wir erstellen sukzessive aus der durch $x_1, \ldots, x_m$ (Nichtbasisvariablen) gegebenen Koordinatendarstellung eine in y-Koordinaten $y_1, \ldots, y_n$ (Basisvariablen), schrittweise durch **Basiswechsel und Verschieben** mittels des Austauschalgorithmuses.

Man beginnt im Ursprung $(x_1, \ldots, x_m) = (0, \ldots, 0)$ und wandert an eine Rand(hyper)fläche des Simplex. Zuerst entlang der Koordinatenachse x_1, dann von dort aus parallel zur Koordinatenachse x_2, bis alle x-Koordinaten durch die y-Darstellung ersetzt wurden. Anschließend befinden wir uns in einem Ursprung $(y_1, \ldots, y_n) = (0, \ldots, 0)$, einer Ecke des Simplex.

1.1.1 Erstellung der Normalform

1. Differenz aus der linken und der rechten Seite der Ungleichung erstellen, d.h. aus

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j \leq b_i$$

Ungleichung der Form

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j + b_i \geq 0$$

erzeugen.

2. Den neuen Ungleichungen Nichtbasisvariablen y_i (i=1,...,n) zuordnen
3. Die a_{ij}'s in eine $m \times n$ - Matrix eintragen
4. Zielfunktion max $c^\top x$ durch $z = c^\top x + 0$ ersetzen (unsere Basislösung)

1.1.2 Beispiel

$$\max\ x_1 + 2x_2 \tag{1}$$

unter den Nebenbedingungen

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 6 \tag{2}$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 15 \tag{3}$$

$$3x_1 - x_2 \leq 15 \tag{4}$$

wird zu:

$$z = x_1 + 2x_2 + 0 \tag{5}$$

$$y_1 = 2x_1 - 3x_2 + 6 \geq 0 \tag{6}$$

$$y_2 = -x_1 - 3x_2 + 15 \geq 0 \tag{7}$$

$$y_3 = -3x_1 + x_2 + 15 \geq 0 \tag{8}$$

oder in Tableau-Darstellung:

	x_1	x_2	1	
y_1	2	-3	6	≥ 0
y_2	-1	-3	15	≥ 0
y_3	-3	1	15	≥ 0
z	1	2	0	**max!**

1.2 Eckentausch

Unter allen negativen Quotienten $\frac{b_i}{b_{is}}$ wird der maximalste als Pivotelement ausgesucht und dann mittels des Austauschalgorithmuses eine neue Ecke bestimmt. Wenn alle $z_i < 0$ sind, ist ein Maximalwert gefunden.

1.3 Der Austauschalgorithmus

Der Austauschalgorithmus führt über - dem Gauß-Algorithmus ähnliche - Berechnungen einen *Basiswechsel mit Verschieben* zu einem gegebenen Pivotelement $b_{rs} < 0$ durch, d.h. wir formen die r-te Gleichung nach der s-ten Variable um und setzen dies überall ein.

$$b_{ik} = \begin{cases} \frac{1}{b_{ik}} & \text{wenn } i = r \text{ und } k = s\text{, d.h. es sich um das Pivotelement handelt } \textit{(1)} \\ \frac{b_{is}}{b_{rs}} & \text{wenn } i \neq r \text{ und } k = s\text{, d.h. es sich um die Pivotspalte handelt } \textit{(2)} \\ -\frac{b_{ik}}{b_{rs}} & \text{wenn } i = r \text{ und } k \neq s\text{, d.h. es sich um die Pivotzeile handelt } \textit{(3)} \\ b_{ik} - \frac{b_{rk}b_{is}}{b_{rs}} & \text{sonst } \textit{(4)} \end{cases}$$

2 Das Vorgehen

2.1 mit Ungleichungen

Wir suchen im Zielvektor ($c = (1, 2)$) nach einem positiven Skalar (wir wollen die Zielfunktion ja erhöhen). Unsere Wahl fällt auf $c_1 = 1$. Wir wollen nun x_1 maximal erhöhen und bestimmen dazu die Gleichung, die unsere Nichtbasisvariable x_1 am stärksten einschränkt und setzen dazu alle anderen Nichtbasisvariablen (bei uns nur x_2) auf 0.

$$y_1 = 2x_1 - 3x_2 + 6 \geq 0 \Leftrightarrow 2x_1 + 6 \geq 0 \qquad \Leftrightarrow x_1 \geq -3 \tag{9}$$

d.h. wir könnten x_1 unbegrenzt erhöhen

$$y_2 = -x_1 - 3x_2 + 15 \geq 0 \Leftrightarrow -x_1 + 15 \geq 0 \qquad \Leftrightarrow x_1 \leq 15 \tag{10}$$

d.h. wir könnten x_1 um 15 erhöhen

$$y_3 = -3x_1 + x_2 + 15 \geq 0 \Leftrightarrow -3x_1 + 15 \geq 0 \qquad \Leftrightarrow x_1 \leq 5 \tag{11}$$

d.h. wir könnten x_1 um 5 erhöhen

d.h. y_3 schränkt unser x_1 am stärksten ein.

Wir tauschen jetzt die Basisvariable y_3 mit der Nichtbasisvariable x_1, in dem wir y_3 nach x_1 auflösen und in allen anderen Ungleichungen (inkl. der Zielfunktion) einsetzen.

$$y_3 = -3x_1 + x_2 + 15 \geq 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}y_3 + \frac{1}{3}x_2 + 5 \geq 0 \tag{12}$$

einsetzen in die anderen Ungleichungen:

$$y_1 = 2x_1 - 3x_2 + 6 = 2(-\frac{1}{3}y_3 + \frac{1}{3}x_2 + 5) - 3x_2 + 6 = -\frac{2}{3}y_3 - \frac{7}{3} + 16 \geq 0 \tag{13}$$

$$y_2 = -x_1 - 3x_2 + 15 = -(-\frac{1}{3}y_3 + \frac{1}{3}x_2 + 5) - 3x_2 + 15 = \frac{1}{3}y_3 - \frac{10}{3} + 10 \geq 0 \tag{14}$$

$$z = x_1 + 2x_2 = (-\frac{1}{3}y_3 + \frac{1}{3}x_2 + 5) + 2x_2 = -\frac{1}{3}y_3 + \frac{7}{3}x_2 + 5 \tag{15}$$

daraus bestimmen wir eine neue Basislösung, in dem wir alle Nichtbasisvariablen auf 0 setzen:

$$x_2 = 0, y_3 = 0 \tag{16}$$

$$x_1 = 5 \tag{17}$$

$$y_1 = 16 \tag{18}$$

$$y_2 = 10 \tag{19}$$

$$z = 5 \tag{20}$$

2.2 im Tableau

Wir suchen im Zielvektor ($c = (1, 2)$) nach einem positiven Skalar (wir wollen die Zielfunktion ja erhöhen). Unsere Wahl fällt auf $c_1 = 1$. D.h. wir beginnen die Suche nach unserem Pivotelement in der ersten Spalte, die wir fortan Pivotspalte nennen wollen.

Um ein Pivot zu bestimmen, suchen wir in der Pivotspalte nach Einträgen $b_{ij} < 0$ und erstellen aus dem konstanten Teil b_i der Ungleichung den Quotienten $\frac{b_i}{b_{is}}$.

	x_1	x_2	1		$\frac{b_i}{b_{is}}$
y_1	2	-3	6	≥ 0	
y_2	-1	-3	15	≥ 0	$\frac{15}{-1}$
y_3	-3	1	15	≥ 0	$\frac{15}{-3}$
z	1	2	0	**max!**	

Aus unseren gebildeten Quotienten $\frac{b_i}{b_{is}}$ suchen wir uns den maximalsten Wert heraus (d.h., da die Pivotkandidaten alle < 0 sind, den, mit dem kleinsten Betrag), unsere Wahl fällt also auf $\frac{15}{-3} = -5$, d.h. Gleichung y_3 schränkt unsere Nichtbasisvariable x_1 am stärksten ein (was wir ja oben schon festgestellt haben). Unser Pivotelement ist also b_{31}, unsere Pivotzeile also $i = 3$, unsere Pivotspalte $s = 1$.

Wir wenden also den Austauschalgorithmus auf unser Pivot an, was uns zu folgender Berechnung führt:

Pivotelement:

$$b'_{31} = \frac{1}{b_{31}} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3} \tag{21}$$

Pivotzeile:

$$b'_{32} = -\frac{b_{32}}{b_{31}} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3} \tag{22}$$

$$b'_{33} = -\frac{b_{33}}{b_{31}} = -\frac{15}{-3} = 5 \tag{23}$$

Pivotspalte:

$$b'_{11} = \frac{b_{11}}{b_{31}} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3} \tag{24}$$

$$b'_{21} = \frac{b_{21}}{b_{31}} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} \tag{25}$$

$$b'_{41} = \frac{b_{41}}{b_{31}} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3} \tag{26}$$

sonst:

$$b'_{12} = b_{12} - \frac{b_{11}b_{32}}{b_{31}} = -3 - \frac{2 \cdot 1}{-3} = -\frac{7}{3} \tag{27}$$

$$b'_{13} = b_{13} - \frac{b_{11}b_{33}}{b_{31}} = 6 - \frac{2 \cdot 15}{-3} = 16 \tag{28}$$

$$b'_{22} = b_{22} - \frac{b_{21}b_{32}}{b_{31}} = -3 - \frac{-1 \cdot 1}{-3} = -\frac{10}{3} \tag{29}$$

$$b'_{23} = b_{23} - \frac{b_{21}b_{33}}{b_{31}} = 15 - \frac{-1 \cdot 15}{-3} = 10 \tag{30}$$

$$b'_{42} = b_{42} - \frac{b_{41}b_{32}}{b_{31}} = 2 - \frac{1 \cdot 1}{-3} = \frac{7}{3} \tag{31}$$

$$b'_{43} = b_{43} - \frac{b_{41}b_{33}}{b_{31}} = 0 - \frac{1 \cdot 15}{-3} = 5 \tag{32}$$

Wir erhalten als neues Tableau

	y_3	x_2	1		$\frac{b_i}{b_{is}}$
y_1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{3}$	16	≥ 0	$\frac{16}{-\frac{7}{3}}$
y_2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{3}$	10	≥ 0	$\frac{10}{-\frac{10}{3}}$
x_1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	5	≥ 0	
z	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	5	**max!**	

Unsere Zielfunktion hat sich also ebenfalls auf 5 verbessert.

Es folgen die weiteren Schritte des Algorithmus bis zum Ende:

Wir wollen jetzt x_2 maximal erhöhen, d.h. wir suchen in Spalte $s = 2$ nach einem Pivotkandidaten, zur Auswahl stehen $-\frac{7}{3}$ und $-\frac{10}{3}$. Wir wählen wieder den maximalsten Quotienten $\frac{b_i}{b_{is}}$ aus (wir erinnern uns: die Quotienten sind alle negativ, d.h. wir wählen den Quotienten mit dem kleinsten Betrag aus), d.h. unser Pivotelement ist $-\frac{10}{3}$, unsere Pivotzeile also $i = 2$, unsere Pivotspalte ebenfalls $s = 2$.

Wir tauschen also jetzt x_2 mit y_2. Wir wenden abermals den Austauschalgorithmus an und erhalten folgendes Tableau:

	y_3	y_2	1	
y_1	$-\frac{9}{10}$	$\frac{7}{10}$	9	≥ 0
x_2	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$	3	≥ 0
x_1	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	6	≥ 0
z	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{7}{10}$	12	**max!**

Wir finden nun keinen Skalar $c_i \geq 0$ mehr, d.h. wir haben eine *Optimallösung* gefunden, unser Algorithmus terminiert. Die Lösung ist $x_1 = 6$, $x_2 = 3$, der maximale Zielwert also $6 + 2 \cdot 3 = 12$.

Mit [Mic04] kann man auch komplexere LPs gut lösen lassen, die Tableau-Berechnung wird allerdings etwas anders durchgeführt.

Statt mit den Indizes kann man "auf dem Papier" auch ganz gut mit den Fingern arbeiten, indem man sich die Pivotzeile und Pivotspalte markiert.

Literatur

[Mic04] Michel Berkelaar, Kjell Eikland, Peter Notebaert. lp_solve open source (mixed-integer) linear programming system. http://lpsolve.sourceforge.net, 2004.

[Pra07] Prof. Dr. Hartmut Prautzsch. Fakultät für Informatik - Vorlesung - Informatik IV. http://i33www.ibds.uni-karlsruhe.de/info4_skript/Kapitel 2.pdf, 2007.

[Wol93] Wolfgang Boehm, Hartmut Prautzsch. *Numerical Methods.* AK Peters, 1993.