7. Übung zu Informatik IV

Übungsblatt 9

Thomas Pajor

Fakultät für Informatik

ITEC Dillmann
ITEC Beyerer

29. Juni 2006

Inhalt der Übung

Entropie

Seien X, Y Zufallsvariablen über den Alphabeten $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$.

Entropie

Seien X, Y Zufallsvariablen über den Alphabeten $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$.

- Entropie von X:

$$H(X) := -\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log p(x) = E_{p(x)}\{-\log p(X)\}$$

Entropie

Seien X, Y Zufallsvariablen über den Alphabeten $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$.

- Entropie von X:

$$H(X) := -\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log p(x) = E_{p(x)}\{-\log p(X)\}$$

- Verbundentropie von X und Y:

$$H(X, Y) := -\sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(x, y) \log p(x, y) = E_{p(x,y)}\{-\log p(X, Y)\}$$

Entropie

Seien X, Y Zufallsvariablen über den Alphabeten $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$.

- Entropie von X:

$$H(X) := -\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log p(x) = E_{p(x)}\{-\log p(X)\}$$

- Verbundentropie von X und Y:

$$H(X, Y) := -\sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(x, y) \log p(x, y) = E_{p(x,y)}\{-\log p(X, Y)\}$$

- Bedingte Entropie $H(Y|X)$:

$$H(Y|X) := -\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \underbrace{\sum_{y \in \mathcal{Y}} p(y|x) \log p(y|x)}_{=H(Y|X=x)} = E_{p(x,y)}\{-\log p(Y|X)\}$$

Transinformation

- Die Transinformation zwischen zwei Zufallsvariablen X und Y ist

$$I(X;Y) := \sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log\frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}$$

Transinformation

- Die Transinformation zwischen zwei Zufallsvariablen X und Y ist

$$I(X;Y) := \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}$$

- Sie ist ein Spezialfall der Kullback–Leibler–Divergenz

$$D(p||q) := \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)}$$

$\overset{\circ}{\uparrow}$

für zwei Wahrsch.–Verteilungen $p(x)$ und $q(x)$.

Transinformation

- Die Transinformation zwischen zwei Zufallsvariablen X und Y ist

$$I(X;Y) := \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}$$

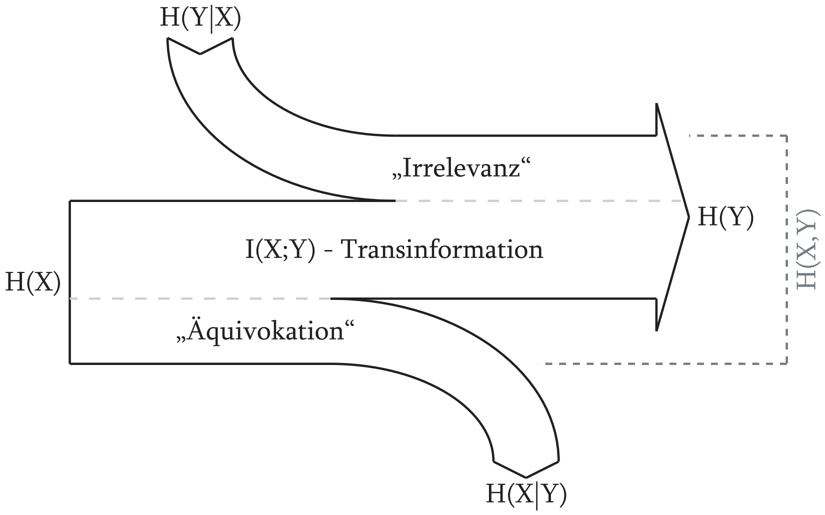
- Sie ist ein Spezialfall der Kullback–Leibler–Divergenz

$$D(p||q) := \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} \qquad\qquad \overset{\circ}{\uparrow}$$

  für zwei Wahrsch.–Verteilungen $p(x)$ und $q(x)$.
- Es gilt

$$I(X;Y) = D(p(x,y)||p(x)p(y)) = E_{p(x,y)}\{\log \frac{p(X,Y)}{p(X)p(Y)}\}$$

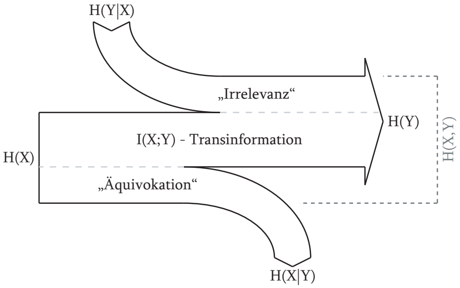
Zusammenhänge



Zusammenhänge II

- Kettenregel:

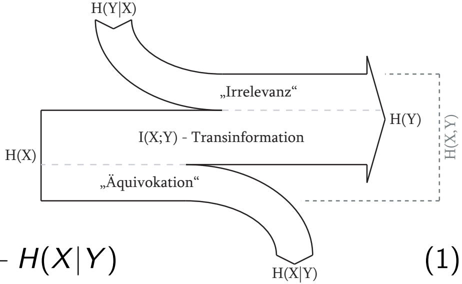
$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y)$$



Zusammenhänge II

- Kettenregel:

$$
\begin{aligned}
H(X,Y) &= H(X) + H(Y|X) \\
&= H(Y) + H(X|Y)
\end{aligned}
$$



- Transinformation und Entropie:

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) \tag{1}$$

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) \tag{2}$$

$$I(X;Y) = H(X,Y) - H(Y|X) - H(X|Y) \tag{3}$$

$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) \tag{4}$$

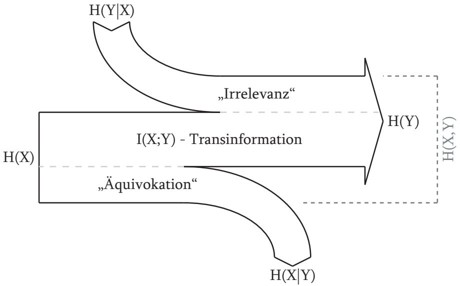
$$I(X;Y) = I(Y;X) \tag{5}$$

$$I(X;X) = H(X) \tag{6}$$

Zusammenhänge II

- Kettenregel:

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= H(X) + H(Y|X) \\ &= H(Y) + H(X|Y) \end{aligned}$$



- Weitere Eigenschaften:

$$H(X_1, \ldots, X_n) \leq H(X_1) + \ldots + H(X_n) \tag{7}$$

$$H(Y|X) \leq H(Y) \tag{8}$$

$$H(X, Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|X, Z) \tag{9}$$

Aufgabe 1.

Definition

Eine Zufallsvariable Y ist eine *Funktion* einer Zufallsvariablen X, falls für alle x mit $p(x) > 0$ nur ein möglicher Wert für y mit $p(x, y) > 0$ existiert.

Aufgabe 1.

Definition

Eine Zufallsvariable Y ist eine *Funktion* einer Zufallsvariablen X, falls für alle x mit $p(x) > 0$ nur ein möglicher Wert für y mit $p(x, y) > 0$ existiert.

Aufgabe

Zeigen Sie:
Wenn $H(Y|X) = 0$ dann ist Y eine Funktion von X.

Metrik

Definition

Eine Funktion $\rho(x, y)$ heißt Metrik, wenn für alle x, y gilt:

1. $\rho(x, y) \geq 0$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) = 0$ gdw. $x = y$
4. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ (Dreiecksungleichung)

Aufgabe 2.

Aufgabe: Metrik

Zeigen Sie:

(a) $\rho(X, Y) := H(X|Y) + H(Y|X)$ ist eine Metrik.

(b) ... dass gilt:

$$\begin{aligned}\rho(X, Y) &= H(X) + H(Y) - 2 \cdot I(X; Y) \\ &= H(X, Y) - I(X; Y) \\ &= 2 \cdot H(X, Y) - H(X) - H(Y)\end{aligned}$$

Aufgabe 3.

Aufgabe: Korrelationsmaß

X_1 und X_2 seien identisch verteilte, aber nicht notwendigerweise stochastisch unabhängige, Zufallsvariablen. Außerdem sei

$$\rho := 1 - \frac{H(X_2|X_1)}{H(X_1)}$$

(a) Zeigen Sie:

$$\rho = \frac{I(X_1; X_2)}{H(X_1)}$$

(b) Zeigen Sie: $0 \leq \rho \leq 1$

(c) Wann ist $\rho = 0$?

(d) Wann ist $\rho = 1$?

Aufgabe 4.

Aufgabe

Sei $p(x)$ eine Wahrsch.–Verteilung. Beweisen Sie für alle $d \geq 0$:

$$\Pr\{p(X) < d\} \log \frac{1}{d} \;\leq\; H(X)$$

Programmieraufgabe

- Der zweite Teil der Programmieraufgabe ist online
- Abgabe bis 21. Juli
- Heute Nachmittag Vorlesung von Prof. Dillmann zu weiteren Merkmalen, die zu implementieren sind

Programmieraufgabe

- Der zweite Teil der Programmieraufgabe ist online
- Abgabe bis 21. Juli
- Heute Nachmittag Vorlesung von Prof. Dillmann zu weiteren Merkmalen, die zu implementieren sind

Viel Spaß und alles Gute für die Klausur!