Aufgaben zum Tut am 10.07.2006

Thomas Pajor

10. Juli 2006

Aufgabe 1.

Es sei die Folge F der Fibonacci Zahlen durch die Rekurrenz

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

und die Anfangsbedingungen $F(2) = 2$ und $F(1) = 1$ gegeben.

Zeigen Sie: Die Fibonacci Zahlen wachsen exponentiell und lassen sich durch

$$F(n) \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

abschäten, wobei der Fehler für $n \to \infty$ gegen 0 strebt.

Hinweis: Die n–te Fibonacci Zahl lässt sich mit der Formel von Binet wie folgt (exakt) berechnen:

$$F(n) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Lösung.

Wir möchten zunächst zeigen dass die Folge

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

der Rekurrenz der Fibonacci Zahlen genügt.

Wir wählen zunächst Q als eine allgemeine Folge $Q(n) = c \cdot b^n$, die exponentiell zur Basis b wächst. Wir fordern nun, dass Q der Rekurrenz

$$Q(n) = Q(n-1) + Q(n-2) \tag{1}$$

genügt, das heißt es muss gelten

$$c \cdot b^n = c \cdot b^{n-1} + c \cdot b^{n-2}$$

Dies lässt sich umformen zu

$$b^2 = b + 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad b^2 - b - 1 = 0$$

Mit der pq–Formel ergeben sich folgende Lösungen:

$$\begin{aligned} \Phi_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Also $\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\Phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$[1].

Unsere Rekurrenzbedingung (1) wird insbesondere[2] von der Folge

$$Q(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

erfüllt. Es bleibt jetzt noch zu zeigen, dass der Fehler der Abschätzung $F(n) \approx Q(n)$ für große n gegen 0 strebt. Dafür benutzen wir die Formel von Binet und zeigen

$$\lim_{n \to \infty} F(n) - Q(n) = 0$$

Wir sehen, dass wir die Formel von Binet umschreiben können zu

$$F(n) = \frac{\Phi_1^n - \Phi_2^n}{\sqrt{5}}$$

---

[1] Von hier aus ist es übrigens nicht mehr weiter schwierig die Formel von Binet selbst herzuleiten, indem man die beiden Lösungen ausnutzt und fordert dass die Anfangsbedingungen der Fibonacci Zahlen erfüllt werden, aber das ist hier nicht die Aufgabe.

[2] Wählen wir $c := \frac{1}{\sqrt{5}}$

damit folgt

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F(n) - Q(n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi_1^n - \Phi_2^n}{\sqrt{5}} - \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi_2^n}{\sqrt{5}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \underbrace{\frac{\sqrt{5}}{2}}_{<\frac{3}{2}}\right)}_{-1<\cdot<1}^n \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\square$

Die in dieser Aufgabe gezeigten Zusammenhänge helfen „möglicherweise“ für die Aufgabe 1e) auf dem aktuellen Übungsblatt…