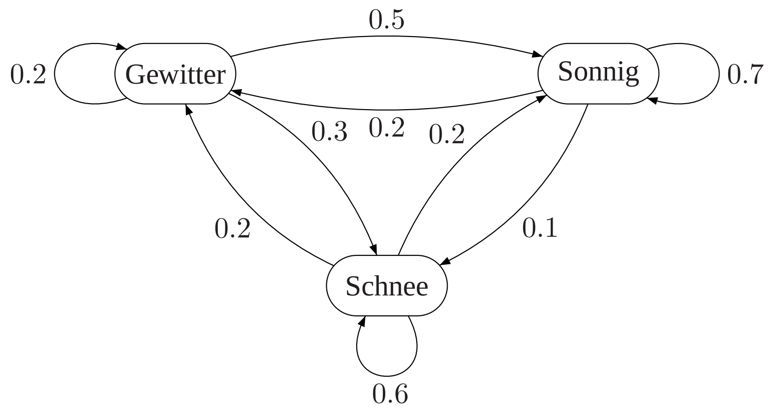
Aufgaben zum Tut am 03.07.2006

Thomas Pajor

6. Juli 2006

Aufgabe 1

Gegeben sei folgender Graph der ein Markov Prozess zur Vorhersage des Wetters modelliert:



Ein Übergang $n \rightsquigarrow n+1$ entspreche dem Zeitintervall von einer Stunde.

(a) Leiten Sie die Wahrscheinlichkeitsübergangsmatrix her. Was ist $\mathcal{X}$?

(b) Angenommen es ist sonniges Wetter. Wie ist das Wetter nach 2 Stunden am wahrscheinlichsten?

(c) Bestimmen Sie eine stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung des Wetters.

Lösung.

(a) Das Alphabet über dem wir operieren entspricht genau den drei Symbolen

$$\mathcal{X} = \{\text{Sonnig}, \text{Schnee}, \text{Gewitter}\}$$

Die Übergänge in dem Graphen induzieren die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\Pr\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$. Sei $P = (P_{i,j})$ die Matrix, die die Übergangswahrscheinlichkeiten angibt. Mit der Definition aus der Vorlesung

$$P_{i,j} = \Pr\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$$

können wir P gemäß der Reihenfolge von $\mathcal{X}$ aus dem Graph ablesen und angeben:

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

(b) Wir nehmen an, dass das Wetter im Moment sonnig ist. Das bedeutet wir haben eine Anfangswahrscheinlichkeitsverteilung von $p(x_1) = (1, 0, 0)$. Wir berechnen nun eine Wahrscheinlichekeitsverteilung auf unserem Alphabet nach zwei Übergängen. Dies entspricht dem Vektor

$$p(x_3) = p(x_2)P = p(x_1)P^2$$

Es gilt

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.61 & 0.19 & 0.2 \\ 0.36 & 0.44 & 0.2 \\ 0.51 & 0.29 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Damit hat das Wetter nach zwei Stunden folgende Verteilung

$$p(x_3) = p(x_1)P^2 = (0.61, 0.19, 0.2)$$

Am wahrscheinlichsten ist also, dass weiterhin die Sonne scheinen wird.

(c) Wir möchten eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ bestimmen die über die Zeit konstant bleibt. Das bedeutet es muss gelten

$$\mu = \mu \cdot P$$

Das entspricht dem Gleichungssystem

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \cdot \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Da dieses Gleichungssystem etwas unhandlich ist, können wir es umformen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mu = \mu P &\Leftrightarrow 0 = \mu P - \mu \\
&\Leftrightarrow 0 = \mu(P - E) \\
&\Leftrightarrow 0 = ((P - E)^\top \mu^\top)^\top \\
&\Leftrightarrow 0 = (P - E)^\top \mu^\top
\end{aligned}$$

also

$$\begin{pmatrix} -0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & -0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & -0.8 \end{pmatrix} \mu = 0$$

Der Kern von $(P-E)^\top$ bzw. die Lösung des homogenen LGS liefert folgenden Vektorraum

$$L = [\begin{pmatrix} 2.6 \\ 0.14 \\ 1 \end{pmatrix}]$$

L enthält unendlich viele Vektoren, wir suchen jedoch nur *einen* Vektor $\mu \in L$, nämlich den, der gerade die stationäre Verteilung angibt. Um diesen zu erhalten benutzen wir die Bedingung, dass $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$ sein muss[1]. Wir erhalten μ indem wir einen beliebigen Vektor $x \in L$ betrachten und normieren[2]. Also

$$\mu = \frac{1}{|x|_1} = \frac{1}{|(2.6, 0.14, 1)|_1}(2.6, 0.14, 1) \approx (0.52, 0.28, 0.2)$$

Aufgabe 2

Wir möchten modellieren wie ein betrunkener Mann nachts durch eine Stadt läuft. Betrachte dazu einen ungerichteten Graph $G = (V, E)$ mit $|E| = e$ und den Knoten $V = \{1, 2, \ldots, m\}$. Wir können die Knoten als Kreuzungen, und die Kanten als Straßen interpretieren.

Der Mann beginnt nun bei einem Knoten i und läuft zufällig in eine Straße die zu i inzident ist. Die Wahrscheinlichkeit dass er aus dem Knoten i zum Knoten j gerät ist also

$$p(j|i) = \begin{cases} \frac{1}{d(i)} & \text{falls } ij \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $d(i)$ den Grad des Knotens i bezeichnet. Die Folge $X_1, X_2, \ldots$ von Knoten, die der Mann abläuft, heißt *Random Walk* in G[3].

[1] Wir hätten sonst garkeine Wahrscheinlichkeitsverteilung

[2] Das ist keine Normierung im Sinne der Euklidnorm sondern der Manhattannorm für die gilt $|x|_1 = \sum_i x_i$. Man erinnere sich evtl. noch dunkel an Numerik.

[3] Man kann im Allgemeinen noch eine Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}^+$ definieren, die ein Gewicht angibt wie „wahrscheinlich“ der Mann eine bestimmte Straße benutzt. Zum Beispiel würde der Mann eine breite Straße wahrscheinlicher betreten als ein schmales Gäßchen. Wir betrachten hier allerdings nur den Fall dass alle Straßen gleich breit sind.

Wir möchten einen Random Walk als Markov Prozess modellieren.

(a) Verifizieren Sie, dass die stationäre Verteilung $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ durch

$$\mu_i = \frac{d(i)}{2e}$$

gegeben ist.

(b) Berechnen Sie die Entropierate für diesen Markov Prozess.

Lösung.

(a) Da wir die Wahrscheinlichkeiten $p(j|i)$ für zwei Knoten i und j gegeben haben, können wir die Übergangsmatrix $P = (P_{i,j})$ aufstellen. Es gilt

$$P_{i,j} = p(j|i)$$

Um also die stationäre Verteilung zu verifizieren müssen wir zeigen dass μ der Gleichung

$$\mu = \mu P$$

genügt. Unter der Annahme dass im vorangegangen Schritt die Wahrscheinlichkeitsverteilung μ vorliegt, liefert Nachrechnen für μ_j

$$\begin{aligned}
\mu_j &= \mu P_j \\
&= \sum_i \mu_i P_{i,j} \\
&= \sum_i \frac{d(i)}{2e} P_{i,j} \\
&= \sum_{i:ij \in E} \frac{d(i)}{2e} \frac{1}{d(i)} \\
&= \sum_{i:ij \in E} \frac{1}{2e} \\
&= \frac{d(j)}{2e}
\end{aligned}$$

wobei P_j die j-te Spalte in P bezeichne.

Wir sehen also dass μ durch Multiplikation mit P nicht verändert wird. Außerdem gilt

$$\sum_i \frac{d(i)}{2e} = 1$$

was äquivalent ist zu

$$\sum_i d(i) = 2e$$

Das ist offensichtlich erfüllt, da jede Kante zu genau zwei Knoten inzident ist. Summieren wir die Knotengrade, so zählen wir dabei jede Kante doppelt.

$\Rightarrow \mu$ ist eine stationäre Verteilung für den Prozess.

(b) Die Entropierate berechnet sich für einen stationären Markov Prozess durch

$$\begin{aligned}
H(\mathcal{X}) &= H(X_2|X_1) \\
&= -\sum_i \mu_i \sum_j P_{i,j} \log P_{i,j} \\
&= -\sum_i \frac{d(i)}{2e} \sum_{j:ij\in E} \frac{1}{d(i)} \log \frac{1}{d(i)} \\
&= -\sum_i \sum_{j:ij\in E} \frac{1}{2e} \log \frac{1}{d(i)} \\
&= -\sum_i \sum_{j:ij\in E} \frac{1}{2e} \log \frac{\frac{1}{2e}}{\frac{d(i)}{2e}} \\
&= -\sum_i \sum_{j:ij\in E} \frac{1}{2e} \log \frac{1}{2e} + \sum_i \sum_{j:ij\in E} \frac{1}{2e} \log \frac{d(i)}{2e} \\
&= H(\frac{1}{2e}, \ldots, \frac{1}{2e}) + \sum_i \log \frac{d(i)}{2e} \sum_{j:ij\in E} \frac{1}{2e} \\
&= \log(2e) + \sum_i \frac{d(i)}{2e} \log \frac{d(i)}{2e} \\
&= \log(2e) - H(\frac{d(1)}{2e}, \frac{d(2)}{2e}, \ldots, \frac{d(|V|)}{2e})
\end{aligned}$$

Es ist erstaunlich dass die Formel so einfach ist. Man mag es auf den ersten Blick kaum glauben. Die Entropierate scheint also nur von der Verteilung der Kanten in in G abzuhängen, und sich nicht auf die wirkliche Struktur des Graphen zu beziehen.

Man kann nun noch weitere Fragen stellen wie „Angenommen der betrunkene Mann wohnt bei Knoten k. Erreicht er, egal in welchem Knoten i er startet, stets in endlicher Zeit sein zu Hause? Und falls ja[4], wieviele Schritte sind dazu im Durchschnitt notwendig?“ oder „Wieviele Schritte sind im Durchschnitt notwendig, damit der Mann an jeder Kreuzung (jedem Knoten) des Graphen mindestens einmal gewesen ist?“ Diese Fragen würden jedoch das Tutorium sprengen; Wer jedoch Lust hat kann sich überlegen wie die Antworten auf diese Fragen lauten könnten.

[4] Er tut das tatsächlich