Aufgaben zum Tut am 19.06.2006

Thomas Pajor

19. Juni 2006

Aufgabe 1.

Ein Beobachter beobachtet eine Quelle über dem Alphabet $X = \{A, B, C, D, R\}$, die folgende Zeichen aussendet:

$$S := ABRACADABRA$$

(a) Berechnen sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von S

(b) Welche Information hat das Zeichen A, welche das Zeichen C?

(c) Wieviel Bits sind mindestens nötig um S zu kodieren?

Lösung.

(a) Um die Wahrscheinlichkeitsverteilung zu ermitteln, können wir einfach die relative Häufigkeit jedes Zeichens $x_i \in X$ ermitteln;, also abzählen. Mit $|S| = 11$ folgt dann

$$P(X = A) = \frac{5}{11} \quad P(X = B) = \frac{2}{11} \quad P(X = C) = \frac{1}{11} \quad P(X = D) = \frac{1}{11} \quad P(X = R) = \frac{2}{11}$$

Wir vergewissern uns, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten gerade 1 ergibt.

(b) Die Information $I(x_i)$ eines Zeichens $x_i \in X$ ist definiert durch

$$I(x_i) := -\log P(X = x_i)$$

Damit gilt

$$I(A) = -\log P(X = A) = -\log \frac{5}{11} \approx 1.137\text{bit}$$

und

$$I(C) = -\log P(X = C) = -\log \frac{1}{11} \approx 3.459\text{bit}$$

Das Zeichen C hat also viel höhere Information als das Zeichen A. Das kann man sich intuitiv dadurch klarmachen, dass das C eine viel höhere „Überraschung“ mit sich bringt, als ein A, da es statistisch viel seltener auftaucht. Das Auftauchen von C wird also sehr viel mehr Information mit sich bringen.

(c) Um eine untere Schranke anzugeben wieviel Bit zur Kodierung von S nötig sind, berechnen wir den Informationsgehalt der kompletten Zeichenkette S. Dafür berechnen wir zunächst die Entropie für X und kriegen damit eine Größe wieviel bit Information pro Zeichen in S stecken.

Die Entropie $H(X)$ ist definiert durch

$$H(X) = H(p_A, p_B, p_C, p_D, p_R) = -\sum_{i=1}^{|X|} P(X = x_i) \log P(X = x_i)$$

In unserem Fall also

$$\begin{aligned} H(X) &= -\left(\frac{5}{11} \log \frac{5}{11} + \frac{2}{11} \log \frac{2}{11} + \frac{1}{11} \log \frac{1}{11} + \frac{1}{11} \log \frac{1}{11} + \frac{2}{11} \log \frac{2}{11}\right) \\ &\approx 2.040 \frac{\text{bit}}{\text{Zeichen}} \end{aligned}$$

Multiplizieren wir diesen Wert mit der Gesamtlänge der Zeichenkette, so erhalten wir die Information die in S steckt:

$$H_S = |S| \cdot H(X) = 11 \cdot 2.040 = 22.444\text{bit}$$

Die minimale Anzahl an Bit die wir benötigen um S zu kodieren beträgt also 23.

Aufgabe 2.

Gegeben sei folgender binärer, asymetrischer Kanal über den Alphabeten $X = Y = \{0, 1\}$:

$$\begin{array}{ll} P(0|0) = 1 - \beta & P(1|0) = \beta \\ P(0|1) = 0 & P(1|1) = 1 \end{array}$$

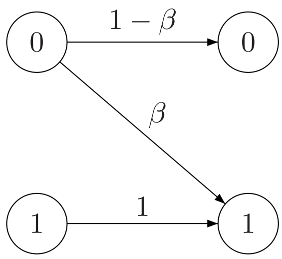
(a) Für welches β hat der Kanal maximale Kapazität?

(b) Für welches $H(X)$ wird bei gegebener Wahrscheinlichkeitsverteilung β der Wert von $H(Y)$ maximal?

(c) Berechnen Sie Fehlinformation, Äquivokation und Transinformation für $\beta = 0.9$ unter Annahme von Gleichverteilung auf X.

Lösung.

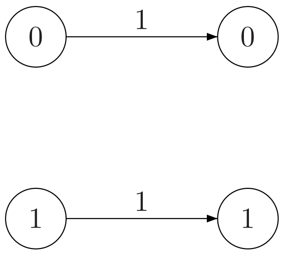
Wir machen uns zunächst den Übertragungskanal an einem Diagramm anschaulich klar:



(a) Die Kapazität des Kanals ist definiert durch

$$C := \max_{P(X)}\{H(X;Y)\}$$

Dabei ist $H(X;Y)$ die Transinformation, also die tatsächlich übertragene Information. Offensichtlich wird die Transinformation maximal, wenn keine Störungen auftreten. Wählen wir $\beta = 0$ so ergibt sich folgende Situation:



Jedes Zeichen wird mit Wahrscheinlichkeit 1 korrekt übertragen. Somit gibt es hier keine Störungen, und die Kapazität wird für $\beta = 0$ maximal.

(b) Unser Ziel ist es die Entropie $H(Y)$ zu maximieren. Machen wir uns zunächst klar, dass $H(Y) = H(p_0, p_1)$ immer bei Gleichverteilung einen maximalen Wert annimmt. Da $p_0 + p_1 = 1$ gelten muss, müssen die Werte p_1 und p_2 folgenden Bedingungen genügen:

a) $p_0 = \alpha$
b) $p_1 = (1 - \alpha)$

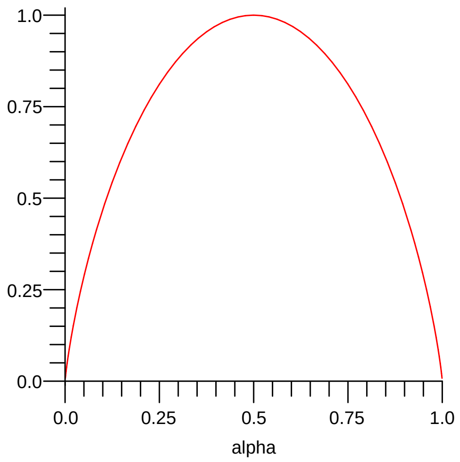


Abbildung 1: $H(Y)$ in Abhängigkeit von α bei einem binären Alphabet mit den Wahrscheinlichkeiten $p_0 = \alpha$ und $p_1 = 1 - \alpha$.

wobei $\alpha \in [0, 1]$. Die Entropie errechnet sich dann durch $H(Y) = -(\alpha \log \alpha + (1 - \alpha) \log(1 - \alpha))$. Trägt man $H(Y)$ in abhängigkeit von α über dem Intervall $[0, 1]$ auf, so ergibt sich das Schaubild aus Abbildung 1.

Es ist leicht ersichtlich, dass das Maximum hier bei $\alpha = \frac{1}{2}$ liegt. Im Allgemeinen gilt, dass die größte Entropie stets bei einer Gleichverteilung angenommen wird[1].

Wir fordern nun

$$P(Y = 0) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}$$

Da wir jedoch die Entropie des Senders, also $H(X)$ berechnen wollen, müssen wir irgendwie $P(X)$ ins Spiel bringen. Wir können die Wahrscheinlichkeit $P(Y = y_i)$ auch schreiben als

$$P(Y = y_i) = \sum_{x_i} P(X = x_i)P(Y|X)$$

denn die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines Zeichens y_i aus Y ist gerade die Summe der Wahrscheinlichkeiten jedes Auftreten von x_j multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, dass es als y_i übertragen wird.

[1] Bei Gleichverteilung ist die „Unsicherheit“, welches Zeichen als nächstes kommt am größten, somit ist auch der Informationsgehalt jedes Zeichens am größten. Ein formaler Beweis findet sich in den Vorlesungsfolien.

Dies liefert für unsere Werte die beiden Gleichungen (LGS)

$$P(Y=0) = (1-\beta)P(X=0) \overset{!}{=} \frac{1}{2}$$
$$P(Y=1) = P(X=1) + \beta P(X=0) \overset{!}{=} \frac{1}{2}$$

Wir können nun dieses LGS auflösen um $P(X=0)$ und $P(X=1)$ zu bestimmen.

$$P(X=0) = \frac{P(Y=0)}{1-\beta} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\beta} = \frac{1}{2-2\beta}$$

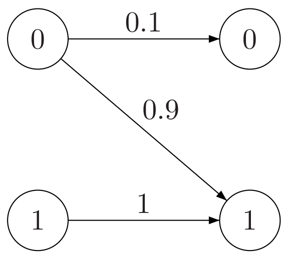
Da wir ein binäres Alphabet haben, und $P(X=0)+P(X=1)=1$ ergeben muss kann man nun $P(X=1)$ ohne viel Rechnerei hinschreiben

$$P(X=1) = 1 - \frac{1}{2-2\beta}$$

Die Entropie des Senders lässt sich nun einfach berechnen:

$$\begin{aligned} H(X) &= H(P(X=0), P(X=1)) \\ &= H(\frac{1}{2-2\beta}, \underbrace{1-\frac{1}{2-2\beta}}_{\frac{1-2\beta}{2-2\beta}}) \\ &= -\frac{1}{2-2\beta}\log\frac{1}{2-2\beta} - \frac{1-2\beta}{2-2\beta}\log\frac{1-2\beta}{2-2\beta} \end{aligned}$$

(c) Es ergibt sich nun folgende konkrete Situation für den Kanal:



Zunächst berechnen wir die Entropien $H(X)$, $H(Y)$ und $H(X,Y)$ (Totalinformation) aus dem Diagramm. Die restlichen Werte lassen sich dann sehr einfach ableiten.

Da wir eine Gleichverteilung seitens X gegeben haben, ist $P(X=0)=P(X=1)=\frac{1}{2}$. Abbildung 1 entnehmen wir eine Entropie $H(X)=1$bit[2] Die Wahrscheinlichkeiten $P(Y)$

[2] Wer das nicht „glaubt“, mag das gerne zu Fuß nachrechnen.

sind ebenfalls schnell berechnet. Es gilt nämlich

$$
\begin{aligned}
P(Y=0) &= P(X=0)\cdot P(Y=0|X=0) + P(X=1)\cdot \underbrace{P(Y=0|X=1)}_{=0} \\
&= \frac{1}{2}\cdot 0.1 \\
&= \frac{1}{20}
\end{aligned}
$$

Und damit folgt sofort $P(Y=1) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$. Für die Entropie $H(Y)$ gilt daher

$$
\begin{aligned}
H(Y) &= H(\frac{1}{20}, \frac{19}{20}) \\
&= -\frac{1}{20}\log\frac{1}{20} - \frac{19}{20}\log\frac{19}{20} \\
&\approx 0.286\text{bit}
\end{aligned}
$$

Die Totalinformation, also $H(X,Y)$ berechnet sich durch

$$
\begin{aligned}
H(X,Y) = H(&P(X=0)P(Y=0|X=0), P(X=0)P(Y=1|X=0), \\
&P(X=1)P(Y=0|X=1), P(X=1)P(Y=1|X=1)) \\
= H(&\frac{1}{20}, \frac{9}{20}, \frac{1}{2} \\
\approx 1&.234\text{bit}
\end{aligned}
$$

Mit diesen drei Werten lassen sich nun die gewünschten Entropien ableiten. Es gilt:

- Fehlinformation (Irrelevanz):

$$H(Y|X) = H(X,Y) - H(X) = 1.234 - 1 = 0.234\text{bit}$$

- Äquivokation (Verlustinformation):

$$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y) = 1.234 - 0.286 = 0.948\text{bit}$$

- Transinformation:

$$H(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = 0.052\text{bit}$$

Man sieht dass der Kanal recht schlecht ist, und nur extrem wenig Information überträgt.