Aufgaben zum Tut am 09.06.2006

Thomas Pajor

9. Juni 2006

Aufgabe 1.

Rohöl soll durch ein chemisches Verfahren in Komponenten zerlegt werden:

- schweres Öl S
- mittelschweres Öl M
- leichtes Öl L

Folgende Verfahren stehen zur Verfügung:

10 Einheiten Rohöl ergeben:

- 2 Einheiten S
- 2 Einheiten M
- 1 Einheit L

Kosten: 3€

10 Einheiten Rohöl ergeben:

- 1 Einheit S
- 2 Einheiten M
- 4 Einheiten L

Kosten: 5€

Ein Kunde möchte nun folgende Lieferverpflichtung erfüllt haben:

- 3 Einheiten S
- 5 Einheiten M
- 4 Einheiten L

Sie sollen diesen Auftrag unter Anwendung der beiden Verfahren so kostengünstig wie möglich erfüllen.

(a) Formulieren Sie das Problem als lineares Programm

(b) Bringen Sie das lineare Programm in Standardform

(c) Lösen Sie das LP mit Hilfe des geometrischen Simplexvefahrens

Lösung.

(a) Wir definieren uns für jedes Verfahren eine Variable x_i. x_1 stehe für die Anwendung des ersten Verfahrens und x_2 für die Anwendung des zweiten Verfahrens. Somit lautet die zu minimierende Zielfunktion

minimiere $3x_1 + 5x_2$

da das erste Verfahren 3€ und das Zweite 5€ kostet.

Die Anwendung des ersten Verfahrens liefert uns 2 Einheiten S, die Anwendung des zweiten Verfahrens 1 Einheit S. Die Gesamtmenge S die produziert werden soll, muss der Lieferverpflichtung entsprechen, also mindestens 3 betragen. Somit können wir folgende Nebenbedingung an das schwere Öl stellen:

$$2x_1 + x_2 \geq 3$$

Analog verfahren wir für M und L. Somit ergeben sich die folgenden Nebenbedingungen:

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & \geq & 5 \\ x_1 & + & 4x_2 & \geq & 4 \\ x_1 & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Die letzten beiden Gleichungen sind notwendig, da wir ein Verfahren nicht eine negative Anzahl oft anwenden können.

(b) Die Umwandlung in Standardform ist recht einfach:

maximiere $-3x_1 - 5x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcl} -2x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\ -2x_1 & - & 2x_2 & \leq & -5 \\ -x_1 & - & 4x_2 & \leq & -4 \\ x_1 & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(c) Siehe Vorlesungsfolien für eine graphische Präsentation.

Wir konstruieren uns zunächst das konvexe Polyeder aus den 5 Nebenbedingungen. Es fällt auf, dass das Polyeder nicht beschränkt ist. Das ist jedoch nicht weiter schlimm, da es in Richtung des Zielvektors c beschränkt ist. Wir beginnen nun bei der Ecke $(x_1, x_2) = (0, 3)$ mit dem Simplex–Algorithmus. Eine verbessernde Kante führt uns zum Punkt $(0.5, 2)$. Von hier aus gibt es eine weitere verbessernde Kante zum Punkt $(2, 0.5)$. Jede Kante von dieser Ecke aus wäre verschlechternd, also ist $(2, 0.5)$ unser Optimalwert[1].

Es fällt natürlich sofort auf, dass das Ergebnis unrealistisch ist. Man kann das Verfahren 2 nicht 0.5 mal anwenden. Würde man zusätzlich zu den Nebenbedingungen fordern, dass die Lösung ganzzahlig sein muss[2], so wird das Problem $\mathcal{NP}$-schwer und ist daher nicht mehr so einfach lösbar[3].

[1] Dieses lokale Optimum ist gleichzeitig das globale Optimum des Systems, da das System linear ist – bzw der Polyeder konvex.

[2] Was hier durchaus Sinn macht!

[3] Siehe dazu auch Info III.