# Aufgaben zum Tut am 15.05.2006

Thomas Pajor

15. Mai 2006

## Aufgabe 1.

In einen binären Suchbaum werden zufällig Elemente aus einer Liste $[e_1, \ldots, e_n]$ eingefügt. Dabei sei jedes Element $e_i$ sein eigener Schlüssel, und aus $i < j$ folgt $e_i < e_j$.

(a) In welchem Fall kommt es zwischen zwei Elementen $e_i$ und $e_j$ zu einem Vergleich?

(b) Wie groß ist demnach die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Elemente $e_i$ und $e_j$ verglichen werden?

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl Vergleiche beim Einfügen von $n$ zufälligen Elementen in den Baum. Leiten sie daraus einen averagecase Aufwand für das Aufbauen eines Binärbaums aus $n$ Schlüsseln ab.

## Lösung.

(a) Zwei Elemente $e_i$ und $e_j$ werden genau dann verglichen, wenn eines der beiden Elemente schon eingefügt wurde, und keines der Elemente $e_{i+1}, \ldots, e_{j-1}$ *vor* dem Einfügen von $e_i$ bzw. $e_j$ eingefügt wurde. Andernfalls würden die Elemente $e_i$ und $e_j$ an einem Zwischenelement $e_k$, $k \in \{i+1, \ldots, j-1\}$, das vorher eingefügt wurde, „gespalten" werden.

(b) Da wir zufällig die Elemente auswählen, können wir Gleichverteilung annehmen. Die Wahrscheinlichkeit, dass aus der Menge $\{e_i, \ldots, e_j\}$ als erstes $e_i$ oder $e_j$ ausgewählt wird ist demnach

$$\frac{\#\text{ günstige Fälle}}{\#\text{ mögliche Fälle}} = \frac{2}{j-i+1}$$

da $|\{e_i, \ldots, e_j\}| = j - i + 1$.

(c) Sei $X_{i,j}$ die Zufallsvariable, die anzeigt ob die Elemente $e_i$ und $e_j$ verglichen werden. Es gilt also

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } e_i \text{ und } e_j \text{ verglichen werden} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Somit gilt für die erwarteten Vergleiche

$$\begin{aligned}
E[\sum_{i<j} X_{i,j}] &= \sum_{i<j} E[X_{i,j}] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1+(1-i)}^{n+(1-i)} \frac{2}{j-i+1-(1-i)} \\
&= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^{n+1-i} \frac{1}{j} \\
&\leq 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}}_{=H_n - 1} \\
&\leq 2n(H_n - 1) \\
&\leq 2n \log n \\
&\in \Theta(n \log n)
\end{aligned}$$

Der averagecase Aufwand für das Einfügen von $n$ Schlüsseln in einen Binärbaum beträgt also $\mathcal{O}(n \log n)$.

**Nur zur Erläuterung**: Die $n$–te harmonische Zahl $H_n$ ist definiert durch

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Definieren wir $\log n$ durch

$$\log n = \int_1^n \frac{1}{k}\, dk$$

und betrachten wir die harmonische Reihe einmal als obere Treppenfunktion und einmal als untere Treppenfunktion für das Integral, so können wir die harmonische Reihe abschätzen durch

$$H_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} < \int_1^n \frac{1}{k}\, dk < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = H_n - \frac{1}{n}$$

und somit $H_n < \log n + 1$ und $H_n > \log n + \frac{1}{n}$. Insgesamt ergibt das

$$\log n + \frac{1}{n} < H_n < \log n + 1$$

Die Wachstumsgeschwindigkeit der harmonischen Zahlen $H_n$ ist damit bestimmt durch $\log n$.

## Aufgabe 2.

Fügen Sie sukzessive die folgenden Werte in einen anfangs leeren AVL Baum ein:

$$4, 5, 7, 2, 1, 3, 6$$

Löschen Sie nun folgende Schlüssel aus dem Baum

$$4, 1, 2$$

### Lösung.

Zu viel Gemale im Moment, vielleicht später.

## Aufgabe 3.

Gegeben sei ein B–Baum $B_k$, der minimal gefüllt ist. Sei $n_B$ die Anzahl Knoten im Baum $B$. Zeigen Sie:

(a) Ein Baum der Höhe $h$ hat $(k+1)^h$ Blätter.

(b) Die Anzahl $n_B$ der Blätter ist gegeben durch

$$n_B = \frac{(k+1)^{h+1} - 1}{k}$$

### Lösung.

(a) Wir führen eine Induktion über die Höhe $h$.

IA: Für $h = 0$ existiert genau ein Knoten, der gleichzeitig auch Blattknoten ist, also ist $(k+1)^0 = 1$ erfüllt.

IV: Die Behauptung gelte für $h$.

IS: Für $h \rightsquigarrow h+1$ gilt nun, dass der Baum nach Induktionsvoraussetzung $(k+1)^h$ Blätter hatte, bevor er anwuchs, da der B–Baum perfekt balanciert ist, und alle Blätter die gleiche Höhe haben, muss der Baum zu jedem Zeitpunkt vollständig sein. Das erhöhen der Höhe kann also nur dadurch erreicht werden, dass wir für jeden der $(k+1)^h$ Blattknoten genau $k+1$ neue Blätter unten anhängen. Damit folgt für die Anzahl der Blätter nun $(k+1)^h \cdot (k+1) = (k+1)^{h+1}$.

$\square$

(b) Wir führen eine erneute Induktion über $h$

IA: Für $h = 0$ gilt

$$n_B = \frac{(k+1)^1-}{k} = \frac{k}{k} = 1$$

was selbstverständlich korrekt ist.

IV: Die Behauptung gelte für $h$.

IS: $h \rightsquigarrow h+1$. Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned} n_{B_{h+1}} &= \frac{(k+1)^{h+1+1} - 1}{k} \\ &= (k+1)\frac{(k+1)^{h+1}}{k} - \frac{1}{k} \\ &= (k+1)^{h+1} + \frac{(k+1)^{h+1} - 1}{k} \\ &\overset{\text{IV}}{=} (k+1)^{h+1} + n_{B_h} \end{aligned}$$

Nach Aufgabenteil (a) hat der Baum der höhe $h+1$ genau $(k+1)^{h+1}$ Blätter. Somit ist die letzte Zeile in unserer Rechnung erfüllt, und die Behauptung gezeigt[1]. $\square$

[1] Alternativ könnte man auch zeigen, dass die Reihe $\sum_{i=0}^{h} (k+1)^i$ den Reihenwert $\frac{(k+1)^{h+1}-1}{k}$ hat, da wir einfach für jede „Ebene“ in dem Baum die Knoten zählen und aufaddieren können, um die Gesamtzahl an Knoten zu erhalten.