Aufgaben zum Tut am 08.05.2006

Thomas Pajor

13. Mai 2006

Aufgabe 1)

Das Problem ELEMENTEINDEUTIGKEIT sei wie folgt definiert:

Gegeben: Eine Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ von Punkten aus $\mathbb{R}$.

Frage: Gibt es zwei Elemente x_i und x_j mit $x_i = x_j$?

Zeigen Sie, dass unter Verwendung von massivem arithmetischen Aufwand Satz A eine untere Schranke von $\Omega(1)$ für das Problem ELEMENTEINDEUTIGKEIT liefert.

Lösung.

Wir werden das Problem für eine gegebene Punktemenge $x_1, \ldots, x_n$ nur durch einen einzigen Vergleich lösen, in dem wir vorher massiv arithmentische Operationen einsetzen, die Satz A als kostenlos veranschlagt.

Gilt für zwei Elemente x_i und x_j dass sie gleich sind, so ist das identisch mit der Frage $x_i - x_j \stackrel{?}{=} 0$. Da unser Ergebnis schon „ja“ sein soll, sobald ein (möglicherweise einziges) Paar identisch ist, können wir folgendes Produkt formulieren

$$P := \prod_{i,j} (x_i - x_j)$$

Sobald ein identisches Paar x_i, x_j existiert ist das ganze Produkt $P = 0$, so dass sich das Problem auf die Frage

$$\prod_{i,j} (x_i - x_j) \stackrel{?}{=} 0$$

reduzieren lässt.

Der Entscheidungsbaum hat also genau zwei Blätter, und damit eine Höhe von $log(2) = 1$. Der Aufwand beträgt also

$$T_{\max} = \Omega(1)$$

$\square$

Aufgabe 2)

Das Problem Punktlokalisation ist im 1–dimensionalen Fall wie folgt definiert:

Gegeben: n Punkte $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ aus $\mathbb{R}$ und ein Anfragepunkt $y \in [x_1, x_n)$.

Gesucht: Ein Index i derart, dass $x_i \leq y \leq x_{i+1}$ erfüllt ist.

Zeigen Sie durch Reduktion von einem bekannten Problem aus der Vorlesung eine untere Schranke für das Problem.

Lösung.

Wir reduzieren das RUNDUNGSPROBLEM (floor–Funktion) auf PUNKTLOKALISATION. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die floor Funktion einen Aufwand von $\Omega(\log n)$ hat.

Sei nun $I := (y, n)$ eine Instanz des RUNDUNGSPROBLEMs, wobei $0 \leq y \leq n$ gilt. Wir definieren uns dazu eine Instanz I' von PUNKTLOKALISATION durch folgende Punktemenge

$$x_i := i \qquad i = 0 \ldots n$$

Der Anfragepunkt sei weiterhin y.

Ein Algorithmus zur Lösung von PUNKTLOKALISATION wird uns nun einen Index i liefern für den

$$i = x_i \leq y \leq x_{i+1}$$

erfüllt ist. Das heißt insbesondere

$$i = \lfloor y \rfloor = \text{floor}(y)$$

Gäbe es also einen Algorithmus der PUNKTLOKALISATION in $o(\log n)$ lösen kann, so ließe sich mit diesem Algorithmus das RUNDUNGSPROBLEM in $o(\log n)$ lösen, was ein Widerspruch zur bewiesenen unteren Schranke von $\Omega(\log n)$ für das RUNDUNGSPROBLEM ist.

$\Rightarrow \Omega(\log n)$ ist eine untere Schranke für die PUNKTLOKALISATION. $\square$