Aufgaben zum Tut am 05.05.2006

Thomas Pajor

27. August 2006

Aufgabe 1)

Seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ rationale Dünnmengen.

Zeigen Sie: $M_1 \cap M_2$ ist wieder eine rationale Dünnmenge.

Lösung.

Nach Definition aus der Vorlesung hat eine rationale Dünnmenge die Gestalt

$$M := \{X \in \mathbb{R}^n \mid B_1(X) \geq 0 \wedge \ldots \wedge B_r(X) \geq 0\}$$

wobei die B_i rationale Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ sind.

Seien also

$$M_1 := \{X \in \mathbb{R}^n \mid B_1(X) \geq 0 \wedge \ldots \wedge B_r(X) \geq 0\}$$

und

$$M_2 := \{X \in \mathbb{R}^n \mid B_{r+1}(X) \geq 0 \wedge \ldots \wedge B_s(X) \geq 0\}$$

zwei rationale Dünnmengen. Da jede der rationalen Funktionen eine Art „Constraint“ für die zulässigen Punkte in der Menge darstellt, gilt für die Punkte aus $M_1 \cap M_2$ dass sie sowohl den Bedingungen von M_1 alsauch den Bedingungen von M_2 genügen müssen, was der logischen Konjunktion der Bedingungen entspricht. Also ist

$$M_1 \cap M_2 = \{X \in \mathbb{R}^n \mid B_1(X) \geq 0 \wedge \ldots \wedge B_r(X) \geq 0 \wedge B_{r+1}(X) \geq 0 \wedge \ldots \wedge B_s(X) \geq 0\}$$

nach Definition wieder eine rationale Dünnmenge.

Aufgabe 2)

Gegeben sei eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := 2^{\lfloor x \rfloor \mod 7}$$

Berechnen Sie mit Hilfe von Satz A die Anzahl Vergleiche R, die jeder Algorithmus im RAM–Modell mindestens benötigt.

Lösung.

Offensichtlich ist f selbst keine rationale Funktion in $\mathbb{R}$, wir analysieren also zunächst die Werte, die f annehmen kann. Für $\lfloor x \rfloor \mod 7$ gilt

$$\lfloor x \rfloor \mod 7 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

und somit

$$2^{\lfloor x \rfloor \mod 7} \in \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$$

Wir können also nun $q := 7$ paarweise verschiedene rationale Funktionen definieren:

$$\begin{array}{lll} Q_1(X) := 1 & Q_4(X) := 8 & Q_7(X) := 64 \\ Q_2(X) := 2 & Q_5(X) := 16 & \\ Q_3(X) := 4 & Q_6(X) := 32 & \end{array}$$

Wir definieren nun geschickt q paarweise verschiedene Punkte $X_i \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lll} X_1 := 0,5 & X_4 := 3,5 & X_7 := 6,5 \\ X_2 := 1,5 & X_5 := 4,5 & \\ X_3 := 2,5 & X_6 := 5,5 & \end{array}$$

Für jedes $0 < \varepsilon < 0,5$ gilt offenbar $f(X) = Q_i(X)$ für alle $X \in U(X_i, \varepsilon)$. Wir können also zum Beispiel $\varepsilon := \frac{1}{3}$ setzen.

Somit folgt aus Satz A, dass die Anzahl Vergleiche R im RAM–Modell zur Berechnung von f mindestens $\log_2(7)$ betragen muss, woraus $R = 3$ folgt.

Aufgabe 3)

Gegeben sei folgendes Problem: Für einen Vektor $(x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ möchten wir die Anzahl x_i zählen, für die $x_i > 0$ erfüllt ist. Der Algorithmus 1 löst das Problem.

(a) Geben Sie für das Problem mit $n = 2$ einen Entscheidungsbaum an.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von Satz A eine allgemeine untere Schranke für das Problem.

Algorithmus 1 : COUNTPOSITIVE

Eingabe : Ein Vektor $(x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$
Ausgabe : Die Anzahl Werte x_i für die $x_i > 0$ erfüllt ist

```
anzahl ← 0
für i ← 1 ... n tue
    wenn x_i > 0 dann
        anzahl ← anzahl + 1
```

Lösung.

(a) Der Entscheidungsbaum aus Abbildung 1 illustriert die Lösung.

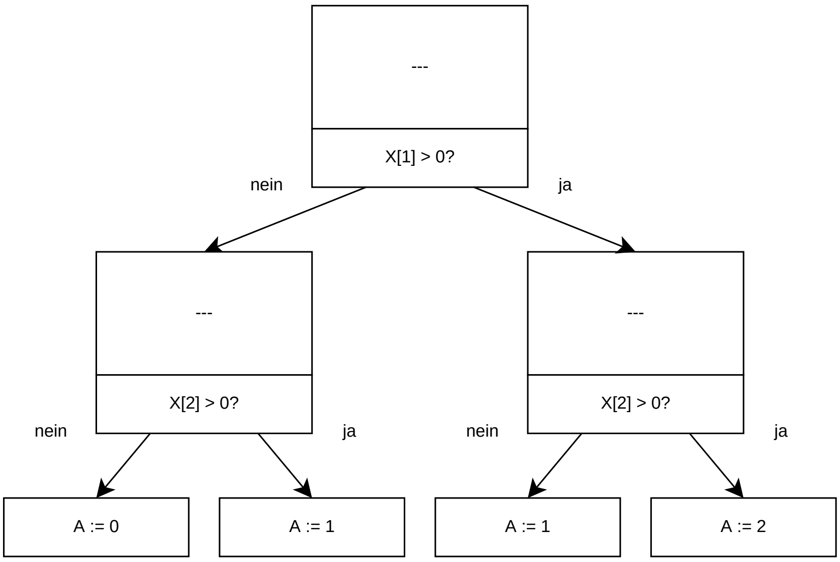

Abbildung 1: Entscheidungbaum für $n = 2$.

(b) Achtung: Neue Lösung!

Wir definieren uns zunächst $q = n + 1$ Punkte $X_i \in \mathbb{R}^n$ wie folgt:

$$
\begin{aligned}
X_1 &:= (-1, \ldots, -1, -1, -1) \\
X_2 &:= (-1, \ldots, -1, -1, 1) \\
X_3 &:= (-1, \ldots, -1, 1, 1) \\
X_4 &:= (-1, \ldots, 1, 1, 1) \\
&\vdots \\
X_q &:= (1, \ldots, 1, 1, 1)
\end{aligned}
$$

Zu jedem dieser Punkte definieren wir uns eine rationale Funktion Q_i durch

$$Q_i := \text{Anzahl positiver einsen in } X_i$$

So gilt $Q_1(X) = 0$, $Q_2(X) = 1, Q_3(X) = 2$, $Q_4(X) = 3, \ldots, Q_q(X) = n$.
Für jedes $0 < \varepsilon < 1$ ist nun $f(X) = Q_i(X)$ für alle $X \in U(X_i, \varepsilon)$. Wir können also $\varepsilon := \frac{1}{2}$ setzen. Mit hilfe des Lower–Bound–Theorems folgt nun für die Anzahl R der Vergleiche

$$R \geq \log_2 q = \log_2(n+1)$$

Es sind also mindestens $\log_2(n+1)$ Vergleiche im RAM–Modell nötig um die Anzahl positiver Vorkommen in einem Vektor $X \in \mathbb{R}^n$ zu zählen.