

# Das Mysterium der Koordinatenvektoren bei linearen Abbildungen

Thomas Pajor

17. September 2005

## Zusammenfassung

Teil der Vorlesung „Lineare Algebra und Analytische Geometrie“ an der Universität Karlsruhe (TH) ist die Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen. Diese setzen ein Verständnis des Begriffs *Koordinatenvektor* voraus. Da dieses Thema extremst grundlegend und wichtig ist, und es meist nicht richtig verstanden wird, habe ich dieses kleine Paper geschrieben, um vielleicht ein wenig für Aufklärung zu sorgen. Folgende Themen werden behandelt:

- Basis
- Koordinatenvektor
- Endomorphismen in  $\mathbb{R}^n$
- Darstellung von Endomorphismen durch Matrizen
- Basiswechsel

Das Dokument erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit in irgend einer Weise. Die Beispiele sind meistens nur im Anschauungsraum  $\mathbb{R}^3$  um sie möglichst einfach zu halten, so dass man nicht unnötig verwirrt wird. Da es in Klausuren allerdings meist weitaus komplexere Vektorräume gibt, sollte man möglichst die Zusammenhänge verstehen, dann klappt es nämlich auch bei beliebigen Vektorräumen.

## 1 Koordinatenvektoren

### 1.1 Einleitung

Wir legen hier stets  $n$ -dimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume  $V$  zugrunde, zum Beispiel  $\mathbb{R}^n$  mit  $n < \infty$ . Natürlich funktioniert alles auch in einem beliebigen Vektorraum über einem beliebigen Körper  $\mathbb{K}$ .

## 1.2 Basis

Jeder Vektorraum hat eine Basis. Das heißt es gibt eine maximal linear unabhängige Menge von Basisvektoren aus  $V$ , so dass sich jeder Vektor aus  $V$  als *Linearkombination* dieser Basisvektoren schreiben lässt. Nehmen wir  $\mathbb{R}^n$  wobei  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  Basis vermöge, dann kann man einen beliebigen Vektor  $x \in V$  ausdrücken als

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$$

für geeignete  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ . Diese Darstellung ist zudem eindeutig, das heißt die  $\alpha_i$  sind für jedes  $x$  eindeutig bestimmt.

Als spezielle Basis sei die sogenannte *Standardbasis*  $\mathcal{B} := \{e_1, \dots, e_n\}$  angeführt. Dabei gilt

$$e_{ij} = \delta_{ij}$$

Im  $\mathbb{R}^3$  sähe diese also zum Beispiel so aus:

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dies sollte jedoch klar sein.

## 1.3 Der Koordinatenvektor

Betrachten wir also nun einen Vektorraum zusammen mit einer Basis  $B$ .

Wir haben gesehen dass sich jeder Vektor als Linearkombination der  $n$  Basisvektoren darstellen lässt. Notiert man sich nun die Koeffizienten  $\alpha_i$  als Vektor und definiert

$$\hat{x}_B := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$$

dann heißt  $\hat{x}_B$  *Koordinatenvektor* von  $x$  bezüglich der Basis  $B$ .

Man muss sich klar machen dass  $\hat{x}_B$  kein Vektor im eigentlichen Sinne ist, sondern nur einen „Punkt im Raum“ anhand der Basis  $B$  beschreibt. Ohne der Angabe der zugehörigen Basis lässt sich keine Aussage machen wo der „Punkt“  $\hat{x}_B$  tatsächlich im Raum ist!

Nun ist interessant zu wissen, und das muss man sich auch klar machen, dass bezüglich der Standardbasis  $\mathcal{B}$  der Vektor  $x$  und der Koordinatenvektor  $\hat{x}_{\mathcal{B}}$  von  $x$  identisch sind.

Kleines Beispiel dazu: Wir sind wieder in  $\mathbb{R}^3$  und betrachten den Vektor  $x := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ . Dieser lässt sich als Linearkombination der Standardbasisvektoren offenbar wie folgt darstellen:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \underbrace{2}_{\alpha_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{3}_{\alpha_2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{-5}_{\alpha_3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Betrachte nun den Koordinatenvektor

$$\hat{x}_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Nimmt man jedoch eine beliebige Basis, zum Beispiel  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ , und den gleichen Vektor  $x$  wie oben, so hat  $\hat{x}_B$  eine ganz andere Darstellung, denn

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit ist der Koordinatenvektor offensichtlich

$$\hat{x}_B = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Hier gilt jetzt  $\hat{x}_B \neq x$ !

Übrigens: Den Koordinatenvektor  $\hat{x}$  eines Vektors  $x$  zu einer beliebigen Basis  $B$  lässt sich finden indem man das inhomogene LGS

$$(b_1 \quad \cdots \quad b_n) \cdot \hat{x} = x$$

löst.

Also nochmal kurzgefasst: Jeder Vektor  $x$  lässt sich als Linearkombination der Basisvektoren einer bestimmten Basis beschreiben. Der Koordinatenvektor  $\hat{x}$  setzt sich aus den Koeffizienten dieser Linearkombination zusammen, und man sagt „Koordinatenvektor  $\hat{x}$  bezüglich der Basis  $B$ “.

## 2 Endomorphismen

### 2.1 Definitionsarten

Betrachten wir nun einen Endomorphismus  $\Phi : V \rightarrow V$ <sup>1</sup>. Wir wissen aus der Vorlesung, dass eine lineare Abbildung (also auch  $\Phi$ ) eindeutig durch die Bilder der Basisvektoren einer *beliebigen*

<sup>1</sup>Man kann das Spiel auch mit linearen Abbildungen zwischen zwei verschiedenen Vektorräumen treiben. Experimente seien dem geneigten Leser zur Übung überlassen.

Basis in  $V$  definiert wird.

Beispiel: Sei  $\mathbb{R}^3$  mit Standardbasis  $\mathcal{B}$  und  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  zum Beispiel durch

$$\Phi(e_1) = \Phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(e_2) = \Phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(e_3) = \Phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vermöge.

Damit ist  $\Phi$  eindeutig definiert.

Eine andere Möglichkeit wie man  $\Phi$  definieren kann, ist durch die Angabe der Abbildungsvorschrift. Dabei gibt man an, was mit den einzelnen Komponenten eines abstrakten Vektors passiert. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 2a_1 + 2a_2 \\ 3a_1 - 4a_2 + 2a_3 \\ 2a_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diese Definition ist ebenso eindeutig<sup>2</sup>.

Eine dritte Möglichkeit ist nun noch die fertigste von allen. Man definiert sich  $\Phi$  nicht direkt durch die Bilder der Basisvektoren, sondern durch Angabe der Linearkombinationen wie diese Bilder zustande kommen. Vermöge Standardbasis, dann könnte so eine Definition zum Beispiel wie folgt aussehen:

$$\Phi(e_1) = 2e_1 + 3e_2$$

$$\Phi(e_2) = 2e_1 - 4e_2 + 2e_3$$

$$\Phi(e_3) = 2e_2$$

Auch diese Definition ist eindeutig. Mehr zu den ersten beiden Definitionen später. Konzentrieren wir uns erstmal auf die Letzte.

---

<sup>2</sup>Es lassen sich mit dieser Methode auch nicht-lineare Funktionen definieren, zum Beispiel  $\Upsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$ .

## 2.2 Die Abbildungsmatrix

Nun hat man sicherlich schon gehört, dass sich eine lineare Abbildung auch durch eine *Abbildungsmatrix* definieren lässt. Da wir in Abschnitt 2.1 nur Endomorphismen  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  betrachtet haben, werden unsere Abbildungsmatrizen alle die Form  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  haben.

Man muss jedoch wissen, dass es zu einem Endomorphismus  $\Phi$  nicht nur eine Abbildungsmatrix  $A_\Phi$  gibt, sondern mehrere — ja sogar unendlich viele. Das liegt daran, dass  $A_\Phi$  jeweils für eine spezielle Basis definiert wird.

Hat man jetzt die Abbildungsmatrix  $A_\Phi$  eines Endomorphismus  $\Phi$  bezüglich einer Basis  $B$  und betrachtet die (Hilfs-)Abbildung:

$$\begin{aligned} f_\Phi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \hat{x}_B &\mapsto A_\Phi \hat{x}_B \end{aligned}$$

so bildet diese *Koordinatenvektoren* bezüglich der Basis  $B$  auf Koordinatenvektoren der Basis  $B$  gemäß der Abbildungsvorschrift von  $\Phi$  ab! Also gilt

$$f(\hat{x}_B) = A_\Phi \hat{x}_B$$

Das ist nichts weiter als eine Matrix–Vektor–Multiplikation.

## 2.3 Abbildung $\rightsquigarrow$ Abbildungsmatrix?

Wie sieht denn nun die Abbildungsmatrix eines Endomorphismus  $\Phi$  konkret aus?

Betrachten wir dazu nochmal unser Beispiel von oben – aber diesmal mit einer allgemeinen Basis  $B = (b_1, b_2, b_3)$ :

$$\Phi(b_1) = 2b_1 + 3b_2 \tag{1}$$

$$\Phi(b_2) = 2b_1 - 4b_2 + 2b_3 \tag{2}$$

$$\Phi(b_3) = 2b_2 \tag{3}$$

Die Abbildungsmatrix bezüglich der Basis  $B$  konstruieren wir einfach indem wir die *Koordinatenvektoren* von den *Bildern der Basisvektoren* als *Spalten* in die Matrix  $A_\Phi$  schreiben:

$$A_\Phi = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Machen wir die Probe: Wir multiplizieren den Koordinatenvektor des ersten Basisvektors an die Matrix. Also:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siehe da, wie man in der Gleichung (1) sieht, ist unser Ergebnis der Koordinatenvektor von  $\Phi(b_1)$ !

Neues Beispiel: Eine Abbildung  $\Psi$  sei bezüglich ihrer absoluten Bildvektoren auf einer bestimmten Basis gegeben. Sagen wir

$$C := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Basis vermöge. Dazu definieren wir  $\Psi$  wie folgt:

$$\Psi \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\Psi \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\Psi \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Wie sieht die Abbildungsmatrix aus?

Nun, wenn man ein bisschen überlegt kann diese Darstellung der Abbildung  $\Psi$  in ihre Koordinatendarstellung überführt werden. Die Lösung der inhomogenen LGSe

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

würde die Koordinatenvektoren der jeweiligen Bildvektoren von  $\Psi$  liefern<sup>3</sup> und so zu der Koordinatendarstellung

$$\Psi(c_1) = -1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 + 4 \cdot c_3 \quad (7)$$

$$\Psi(c_2) = 5 \cdot c_1 - 1 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3 \quad (8)$$

$$\Psi(c_3) = 1 \cdot c_1 + 3 \cdot c_2 - 1 \cdot c_3 \quad (9)$$

---

<sup>3</sup>Leider etwas aufwändig, daher ist die in Klausuren meist gleich die Koordinatendarstellung gegeben

führen. Daraus kann man nach dem vorherigen Verfahren die Abbildungsmatrix ablesen und es wäre

$$A_\Psi = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Multiplizieren wir wieder den Koordinatenvektor  $\hat{x}$  des ersten Basisvektors  $c_1$  an die Matrix, so ergibt das

$$A_\Psi \hat{x} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis ist der Koordinatenvektor von  $\Psi(c_1)$ . Rechnen wir den absoluten Vektor aus, so ist das

$$\Psi(c_1) = \Psi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wie man sieht stimmt das mit der Definition (4) hochgradig überein.

Jetzt bleibt noch eine Frage offen. Angenommen wir haben eine Abbildung  $\Delta$  durch ihre Abbildungsvorschrift gegeben. Beispielsweise:

$$\Delta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2a_1 + 2a_2 \\ 3a_1 - 4a_2 + 2a_3 \\ 2a_2 \end{pmatrix}$$

Wie sieht die Abbildungsmatrix bezüglich einer Basis  $D = (d_1, d_2, d_3)$  aus? Ganz einfach. Wir setzen einfach mal die Koordinatenvektoren der Basisvektoren von  $D$  ein, und erhalten dadurch die Koordinatenvektoren der Bildvektoren von  $\Delta(d_i)$ :

$$\Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\Delta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\Delta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Das führt uns zu der altbekannten Koordinatendarstellung:

$$\Delta(d_1) = 2 \cdot d_1 + 3 \cdot d_2 \tag{13}$$

$$\Delta(d_2) = 2 \cdot d_1 + 4 \cdot d_2 + 2 \cdot d_3 \tag{14}$$

$$\Delta(d_3) = 2 \cdot d_2 \tag{15}$$

Damit lässt sich die Abbildungsmatrix wieder leicht ablesen und sie ist bezüglich der Basis  $D$ :

$$A_\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist also ein Leichtes aus einer der Darstellungen einer linearen Abbildung ihre Abbildungsmatrix herzuleiten. Am einfachsten ist es, wenn man es stets über die Koordinatendarstellung der Abbildung macht, denn von ihr lässt sich die Abbildungsmatrix sehr leicht ablesen.

Selbstverständlich gehen alle Wege auch rückwärts. So lässt sich aus der Abbildungsmatrix und ihrer zugehörigen Basis die Abbildung in einer ihrer Darstellungsvarianten schnell aufstellen.

### 3 Basiswechsel

In Kapitel (2.2) haben wir gesehen dass es zu einer Abbildung  $\Phi$  viele verschiedene Abbildungsmatrizen  $A_\Phi$  gibt, wobei jede zu einer bestimmten Basis in  $V$  gehört. Die Überführung der Abbildungsmatrix eines Endomorphismus  $\Phi$  bezüglich einer Basis  $B$  in die Abbildungsmatrix bezüglich einer Basis  $\tilde{B}$  nennt man nun *Basiswechsel*. Wie funktioniert das?

Vermöge  $B := (b_1, \dots, b_n)$  und  $\tilde{B} := (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n)$  zwei verschiedene Basen von  $V$ . Weiterhin soll  $A_\Phi = ((a_{ij}))$  die Abbildungsmatrix von  $\Phi$  bezüglich der Basis  $B$  und  $\tilde{A}_\Phi = ((\tilde{a}_{ij}))$  die Abbildungsmatrix von  $\Phi$  bezüglich  $\tilde{B}$  sein.

Nun kann man ja die *Koordinatenvektoren*  $\hat{b}_i$  von  $\tilde{b}_i$  bezüglich der Basis  $B$  angeben. Anders ausgedrückt:

$$\tilde{b}_i = \sum_{k=1}^n s_{ik} b_k \tag{16}$$

Wir fassen die Koordinaten  $s_{ik}$  mal in einer Matrix  $S = ((s_{ij}))$  zusammen. Da sie von Basisvektoren stammen sind sie (Spaltenweise) in der Matrix linear unabhängig. Das bedeutet, dass  $\text{Rang}(S) = n$  oder auch  $S$  regulär.

Wie aus Kapitel (2.2) bekannt stehen in der Abbildungsmatrix immer Spaltenweise die Koordinatenvektoren der Bildvektoren auf den Basisvektoren. In unserem Fall haben wir als Basis  $\tilde{B}$ , und

können daher schreiben:

$$\Phi(\tilde{b}_k) = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ik} \tilde{b}_i$$

Hier kann man jetzt (16) für  $\tilde{b}_k$  einsetzen und erhält damit:

$$\Phi(\tilde{b}_j) = \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{kj} \tilde{b}_k \tag{17}$$

$$= \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{kj} \left( \sum_{i=1}^n s_{ik} b_i \right) \tag{18}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n s_{ik} \tilde{a}_{kj} \right) b_i \tag{19}$$

Soweit so gut. Nun können wir  $\Phi(\tilde{b}_j)$  aber auch noch anders ausdrücken. Schreiben wir

$$\Phi(\tilde{b}_j) = \sum_{k=1}^n s_{kj} \Phi(v_k) \tag{20}$$

$$= \sum_{k=1}^n s_{kj} \left( \sum_{i=1}^n a_{ik} b_i \right) \tag{21}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} s_{kj} \right) b_i \tag{22}$$

so erhalten wir eine Darstellung von  $\Phi(\tilde{b}_j)$  die zunächst die Basisvektoren in  $B$  von  $\Phi$  abbilden lassen und dann die Basis durch die  $s_{ij}$  wechseln.

Damit können wir die Gleichungen (19) und (22) identifizieren und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n s_{ik} \tilde{a}_{kj} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} s_{kj} \\ \Leftrightarrow S \tilde{A}_\Phi &= A_\Phi S \\ \Leftrightarrow \tilde{A}_\Phi &= S^{-1} A_\Phi S \end{aligned}$$

Was wird hier gemacht? Man muss sich das so vorstellen: Die Matrix  $S$  ist quasi die Abbildungsmatrix der Identität bezüglich der Basen  $B$  nach  $\tilde{B}$ <sup>4</sup>. Die  $S^{-1}$  ist entsprechend die Abbildungsmatrix der Identität von  $\tilde{B}$  nach  $B$ . Es wird also ein Koordinatenvektor bezüglich der Basis  $\tilde{B}$

---

<sup>4</sup>Nimmt man es ganz genau, so ist jede Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung die identische Abbildung von einer Basis in eine Andere. Nämlich in genau die Basis die durch die Bilder der (Urbild-)Basisvektoren gegeben wird.

zunächst in einen Koordinatenvektor bezüglich der Basis  $B$  transformiert. Danach wird dieser Vektor durch  $A_\Phi$  abgebildet. Dieser Koordinatenvektor wird nun durch  $S^{-1}$  wieder in die Basis  $\tilde{B}$  zurücktransformiert.

Genug der Theorie; Zeit für ein Beispiel:

Nehmen wir unsere schon bekannte Abbildung  $\Phi$  her. Definieren wir uns diese mal bezüglich der Standardbasis  $\mathcal{B}$ :

$$\Phi(e_1) = 2e_1 + 3e_2 \tag{23}$$

$$\Phi(e_2) = 2e_1 - 4e_2 + 2e_3 \tag{24}$$

$$\Phi(e_3) = 2e_2 \tag{25}$$

Dann ist die Abbildungsmatrix  $A_\Phi$  bezüglich der Standardbasis

$$A_\Phi = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt möchten wir diese aber in eine andere Basis transformieren, nämlich

$$C := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Wie gehen wir vor um  $S$  zu konstruieren. Laut (16) brauchen wir die Koordinatenvektoren der Vektoren  $c_i$  bezüglich der (in unserem Fall) Standardbasis; Und zwar Spaltenweise. Das ist natürlich bei uns sehr schnell hingeschrieben:

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Invertieren von  $S$  ergibt:

$$S^{-1} := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Somit ist also  $\tilde{A}_\Phi$  gegeben durch:

$$\tilde{A}_\Phi = S^{-1}AS = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 8 & 13 \\ 8 & -4 & -8 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Machen wir mal die Probe. Wir wollen den (absoluten) Vektor  $x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  mit Hilfe beider Abbildungsmatrizen abbilden. Bezüglich der Standardbasis hat der Vektor die Koordinaten

$$\hat{x}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit folgt

$$\hat{y}_B = A\hat{x}_B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Da wir  $A$  bezüglich der Standardbasis definiert haben, ist das Ergebnis gerade  $y = \hat{y}_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ <sup>5</sup>.

Nun rechnen wir das mal noch in der anderen Basis nach. Der Koordinatenvektor  $\hat{x}_C$  von  $x$  ist gegeben durch die Lösung des LGS:

$$(c_1 \quad \cdots \quad c_n) \cdot \hat{x}_C = x \quad \Leftrightarrow \quad \hat{x}_C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Multiplizieren wir diesen mit  $\tilde{A}_\Phi$  so ergibt das:

$$\hat{y}'_C = \tilde{A}_\Phi \cdot \hat{x}_C = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 8 & 13 \\ 8 & -4 & -8 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jetzt wird es spannend, rechnen wir nämlich den absoluten Vektor zu  $\hat{y}'_C$  aus, so ist das

$$\begin{aligned} y' &= 3 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3 \\ &= 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Und man sehe und staune:  $y' = y$  – wie wir es erwartet haben!

---

<sup>5</sup>Wer der Abbildungsmatrix hier nicht „vertraut“ kann ja mal zu Fuß nachrechnen, denn es ist ja  $\Phi(x) = 1 \cdot \Phi(e_1) + 1 \cdot \Phi(e_2) + 1 \cdot \Phi(e_3)$  und die Ergebnisse der einzelnen Abbildungen kann man *direkt* der Definition entnehmen!

Die Rücktransformation ist denkbar einfach. Da  $S$  regulär ist gilt nämlich:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= S^{-1}AS \\ \Leftrightarrow S\tilde{A} &= SS^{-1}AS \\ \Leftrightarrow S\tilde{A}S^{-1} &= SS^{-1}ASS^{-1} \\ \Leftrightarrow S\tilde{A}S^{-1} &= A\end{aligned}$$

Das obige Beispiel hat gezeigt wie man einen Basiswechsel von der Standardbasis in eine andere Basis durchführt. Ebenso ist es natürlich möglich einen Basiswechsel zwischen zwei beliebigen Basen  $\Upsilon$  und  $\Xi$  durchzuführen. Man muss nur die Koordinatenvektoren der Basisvektoren  $\xi_i$  bezüglich der Basis  $v_i$  ausrechnen ( $\rightarrow$  LGSe) und diese dann als Spalten in  $S$  schreiben. Alternativ kann man auch einen Umweg über die Standardbasis machen und zwei Transformationen hintereinander ausführen.'

Beispiel: Wollen wir direkt von  $\Upsilon$  zu  $\Xi$  und sind  $R$  die Transformationsmatrix von  $\mathcal{B}$  nach  $\Upsilon$  und  $T$  die Transformationsmatrix von  $\mathcal{B}$  nach  $\Xi$ , so gilt

$$A^{(\mathcal{B})} = RA^{(\Upsilon)}R^{-1} \quad \text{und} \quad A^{(\Xi)} = T^{-1}A^{(\mathcal{B})}T$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}A^{(\Xi)} &= \underbrace{T^{-1}R}_{=:S^{-1}}A^{(\Upsilon)}R^{-1}T \\ &= S^{-1}A^{(\Upsilon)}(T^{-1}R)^{-1} \\ &= S^{-1}A^{(\Upsilon)}S\end{aligned}$$

## Literatur

- [1] DR. V. DRUMM, PROF. DR. W. WEIL, *Lineare Algebra und Analytische Geometrie*, 2004